Grupos de Dëmushkin

Henrique A. M. S. Souza
Orientador: Prof. Theo A. D. Zapata

O que eu estudei?

- Grupos de Dëmushkin
  - Definição, exemplos, invariantes
- Teorema de Classificação
- M. Shusterman & P. Zalesskii *(Trans. Am. Math. Soc. 2019)*
  - Propriedade de Howson
  - Propriedade de Retração Virtual
  - Extra: produtos pro-p livres e grupos de M. Hall
- A. Jaikin-Zapirain & M. Shusterman *(Adv. Math. 2019)*
  - *Conjectura de Atiyah*
  - *Desigualdade de Hanna Neumann*
- Inércia de Dicks-Ventura para retrações.

Algumas convenções

- G = grupo pro-p
- Por simplicidade, gerador = gerador topológico
  - $d(G)$ = cardinalidade de um conjunto minimal de geradores
- $[x, y] = xyx^{-1}y^{-1}$
- $\llbracket \mathbb{F}_p G \rrbracket$ = álgebra de grupo completa
- $H^n(G, \mathbb{F}_p) = H^n(G)$
- $H_n(G, \mathbb{F}_p) = H_n(G)$

Parte 1 de 3

Definições
Exemplos
Invariantes
Classificação

Definição

1. $H^1(G)$ finito
2. $H^2(G) \simeq \mathbb{F}_p$
3. $\cup: H^1(G) \times H^1(G) \to H^2(G)$ não degenerado

- Infinito $\Rightarrow \cup: H^i(G) \times H^{2-i}(G) \to H^2(G)$ não degenerado
- $\mathrm{cd}(G) = 2$

Invariantes numéricos

- $G \simeq \langle x_1, \cdots, x_d | r = 1 \rangle$
  - $d = d(G)$
- $G^{\mathrm{ab}} \simeq \mathbb{Z}_p / q\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p^{d(G)-1}$
  - $q(G) = q$
- G infinito, $H \leq_c G$
  - $[G:H] < \infty \Rightarrow H$ é Dëmushkin
  - $[G:H] = \infty \Rightarrow H$ é pro-p livre
- Fórmula do posto: $d(U) - 2 = [G:U](d(G) - 2)$

Exemplos

- $d(G) = 1 \Leftrightarrow G$ é finito $\Leftrightarrow G \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
- G é abeliano $\Leftrightarrow G$ é finito ou $\mathbb{Z}_p^2$
- $\mathbb{Z}_p \rtimes_{1+qu} \mathbb{Z}_p \simeq \langle x, y | xyx^{-1} = y^{1+qu} \rangle$
- Completamentos pro-p de superfície
  - orientável de gênero $g \Rightarrow G_g^+$
  - não orientável de gênero $g \Rightarrow G_g^-$ $(p = 2)$

Invariante χ

- Módulo dualizante $I_G \simeq \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$
- Homomorfismo ciclotômico

$$\chi: G \to \mathrm{Aut}(I_G) \simeq 1 + p\mathbb{Z}_p$$

- $J = \mathbb{Z}_p$, ação por χ
  - $\mathrm{Der}(G, J)$ podem ser definidas arbitrariamente
- $\mathrm{Im}(\chi) \subseteq 1 + q(G)\mathbb{Z}_p$
- $\mathrm{scd}(G) = 3 \Leftrightarrow \mathrm{Im}(\chi)$ é finita

Cálculos

G	$d(G)$	$q(G)$	$\mathrm{Im}(\chi)$
$\mathbb{Z}_p^2$	2	0	$\{1\}$
$\mathbb{Z}_p \rtimes_{1+qu} \mathbb{Z}_p$	2	q	$\langle 1+qu \rangle$
G_g^+	$2g$	0	$\{1\}$
G_g^-	g	2	$\{\pm 1\}$

Teorema de Classificação

- Parcial: $G \simeq \langle x_1, \cdots, x_d | r = 1 \rangle$ com $q(G) = q$
  - (1) $q \neq 2$: $r = x_1^q [x_1, x_2] \cdots [x_{d-1}, x_d]$
  - (2) $q = 2$, d ímpar: $r = x_1^2 x_2^{2^f} [x_2, x_3] \cdots [x_{d-1}, x_d]$
  - (3) $q = 2$, d par $r = x_1^{2+\alpha} [x_1, x_2] x_3^{2^f} [x_3, x_4] \cdots [x_{d-1}, x_d]$
- Completa:
  - (3.A) $[\mathrm{Im}(\chi) : \mathrm{Im}(\chi)^2] = 2$: $r = x_1^{2+2^f} [x_1, x_2] \cdots [x_{d-1}, x_d]$
  - (3.B) $[\mathrm{Im}(\chi) : \mathrm{Im}(\chi)^2] = 4$: $r = x_1^2 [x_1, x_2] x_3^{2^f} [x_3, x_4] \cdots [x_{d-1}, x_d]$

Esboço da classificação parcial

- $F = F(x_1, \cdots, x_d)$
  - $F_1 = F, \qquad F_{i+1} = \overline{F_i^q[F_i, F]}$
- $r \equiv \prod_{i=1}^{d} x_i^{qa_i} \prod_{1 \le i < j \le d} [x_i, x_j]^{a_{ij}} \pmod{F_3}$
- Coeficientes são controlados por
$$\eta_{x_i} \cup \eta_{x_j} \in H^2(G, \mathbb{Z}_p/q\mathbb{Z}_p)$$
- Forma simplética em
$$H^1(G, \mathbb{Z}_p/q\mathbb{Z}_p) = \langle \eta_{x_i} \rangle$$
- Descendo a série q-central.

Howson Retrações

Parte 2 de 3

Propriedade de Howson

- $H, K \leq_c G$ finitamente gerados $\Rightarrow d(H \cap K) < \infty$?
- Sim, se...
  - G finito
  - $\mathrm{rk}(G) < \infty$
  - G pro-p livre
- Sim se G for Dëmushkin
  - $d(H \cap K) - 1 \leq p^2(d(H) + d(K) - 2)^2(d(H) - 1)(d(K) - 1)$

A demonstração

- Se H ou K for aberto, $d(H \cap K) - 1 \leq (d(H) - 1)(d(K) - 1)$.
- Fazemos $n = \lfloor \log_p(d(H) + d(K) - 2) \rfloor + 1$
- Existem $H_n \leq_o H$ e $K_n \leq_o K$ com

$$[H{:}H_n] \text{ e } [K{:}K_n] \leq p^n, \qquad H_n \cap K_n = H \cap K$$

- $C = \langle H_n, K_n \rangle$ é pro-p livre
- Desigualdade de Hanna Neumann para pro-p livres

Retração

$H \leq_c G$ é uma retração se...

- existe $\tau: G \to H$ com $\tau_{|H} = \mathrm{Id}_H$
- $\Leftrightarrow \exists\, N \trianglelefteq_c G$ tal que $G = N \rtimes H$
- $\Leftrightarrow \exists\, \lambda: G \to H/\Phi(H)$ e $\mu: G \to H$ tais que

$$\begin{tikzcd}
 & G \arrow[dl, "\mu"'] \arrow[d, "\lambda"] \\
H \arrow[r] & H/\Phi(H)
\end{tikzcd}$$

Retração virtual

- Propriedade: retração *virtual* para subgrupos f.g. $H \leq_c G$
  - Existem $H \leq_c U \leq_o G$ e $N \trianglelefteq_c U$ tal que $U = N \rtimes H$
- Grupos finitos
- Grupos abelianos f.g.
- Grupos pro-p livres f.g.
- Grupos de Demushkin com $d(G) > 2$
- O excepcional $\mathfrak{K} = \langle x, y | xyx^{-1} = y^{-1} \rangle$

A prova $(d(G) > 2)$

- s.p.g. λ existe pela finitude de $H/\Phi(H)$
- Se $q \neq 0$, $\theta = \eta_1$ ou η_2 dependendo da paridade de d
  - Existe $H \leq_c U \leq_o G$ tal que $\theta \in \mathrm{Im}\left(\mathrm{res}_U^G\right)$
- Refinamento da apresentação
  - $U \simeq \langle x_1, \cdots, x_d | r = 1 \rangle$ tal que $\eta(x_{2i-1}) = 0$ para todo $\eta \in \mathrm{Im}\left(\mathrm{res}_U^G\right)$
- λ se levanta em $\mu: U \to H$

$$
\begin{tikzcd}
 & G \arrow[dl, "\mu"'] \arrow[d, "\lambda"] \\
H \arrow[r] & H/\Phi(H)
\end{tikzcd}
$$

A prova ($d(G) = 2$)

- $G = \langle x, y | xyx^{-1} = y^z \rangle$
- Se $\langle y \rangle$ é uma retração virtual, G é virtualmente abeliano
- Dëmushkin não abeliano + virtualmente abeliano $\Rightarrow G \simeq \mathfrak{K}$
- $\mathfrak{K} = \langle x, y | xyx^{-1} = y^{-1} \rangle$ tem retrações virtuais

Aplicações: Greenberg

- G grupo de Dëmushkin com $d(G) > 2$
- Se retração virtual contivesse N pro-p livre normal em G $\Rightarrow G$ conteria $\mathbb{Z}_p^2$
- Centro trivial

Extensões

- G_1 e G_2 são Howson $\Rightarrow G_1 \coprod G_2$ é Howson
- G_1 e G_2 tem retrações virtuais

  $\Rightarrow G_1 \coprod G_2$ tem retrações virtuais
- G é M. Hall se todo $H \leq_c G$ f.g. é virtualmente um fator livre
- Nenhum Dëmushkin infinito é M. Hall
- G é M. Hall f.g. $\Leftrightarrow G$ é produto pro-p livre de finitos e pro-p livres

Parte 3 de 3

Hanna Neumann, Atiyah & Inércia

Desigualdade de Hanna Neumann

- G grupo de Dëmushkin com $d(G) > 2$
- $H, K \leq_c G$ f.g.
    - $X =$ conjunto completo de representantes de $H \setminus \mathrm{G} / K$
- $S = S(G, H, K) = \{x \in X | H \cap xKx^{-1} \neq \{1\}\}$ é finito

$$\sum_{x \in S} d(H \cap xKx^{-1}) - 1 \leq (d(H) - 1)(d(K) - 1)$$

L^2-invariantes

$$\beta_i^G(M) = \inf_{U \leq_o G} \frac{\dim_{\mathbb{F}_p} H_i(U,M)}{[G:U]}$$

- $\beta_i^U(M) = [G:U]\beta_i^G(M)$
- $\beta_i^G\left(\mathrm{Ind}_H^G M\right) = \beta_i^H(M)$
- $M' \leq_c M \Rightarrow \beta_i^G(M) \leq \beta_i^G(M') + \beta_i^G(M/M')$
- $M \simeq \left[\mathbb{F}_p G\right]^d/N \Rightarrow \beta_1^G(M) = \beta_0^G(N) - d + \beta_0^G(M)$

Esboço da finitude de S

- S infinito $\Rightarrow \exists\, F \leq_c G$ pro-p livre e $H', K' \leq_c F$ f.g. com $|S(F, H', K')| = \infty$
- Como $[\![\mathbb{F}_p H']\!]$-módulos:

$$[\![\mathbb{F}_p(F/K')]\!] \simeq \bigsqcup_{x \in X'} [\![\mathbb{F}_p(H'/H' \cap xK'x^{-1})]\!]$$

- Cada $\mathrm{H}_1\left(\mathrm{H}', [\![\mathbb{F}_p(H'/H' \cap xK'x^{-1})]\!]\right)$ é finito
- $\dim_{\mathbb{F}_p} \mathrm{Tor}_1^{[\![\mathbb{F}_p F]\!]}\left([\![\mathbb{F}_p(H' \setminus F)]\!], [\![\mathbb{F}_p(F/K')]\!]\right)$

Estratégia da desigualdade

- $\beta_1^G([\![\mathbb{F}_p(H \setminus G)]\!]) = d(H) - 1, \qquad \beta_1^G([\![\mathbb{F}_p(G/K)]\!]) = d(K) - 1$
- $\beta_1^G([\![\mathbb{F}_p(H \setminus G)]\!] \widehat{\otimes} [\![\mathbb{F}_p(G/K)]\!]) = \sum_{x \in S} d(H \cap xKx^{-1}) - 1$
- Submultiplicatividade $\Rightarrow$ desigualdade
- Conjectura de Atiyah: $\beta_0^G(M)$ é um inteiro
    - $[\![\mathbb{F}_p(H \setminus G)]\!]$ e $[\![\mathbb{F}_p(G/K)]\!]$ tem muitos submódulos com β_1^G nulo
- Subaditividade $\Rightarrow$ submultiplicatividade

Atiyah & Kaplansky

- Vale se G é analítico p-ádico livre-de-torção
- Dëmushkin é residualmente isso
- $\beta_0^G(M)$ arbitrariamente perto de um inteiro
  - $\beta_1^G(M)$ também é inteiro
- $\left[\mathbb{F}_p G\right]$ não possui divisores de 0

G grupo de Dëmushkin infinito, $H \leq_c G$ f.g.

1. Todo $[\![\mathbb{F}_p G]\!]$-módulo M finitamente apresentado sobre H possui um submódulo aberto B tal que $\beta_1^H(B) = 0$

2. $\exists\, U \leq_o G$ e um $[\![\mathbb{F}_p U]\!]$-submódulo A de $[\![\mathbb{F}_p(H \setminus G)]\!]$ tais que:

   I. $\dim_{\mathbb{F}_p}\left([\![\mathbb{F}_p(H \setminus G)]\!]/A\right) \leq \beta_1^G\left([\![\mathbb{F}_p(H \setminus G)]\!]\right)$

   II. $\beta_1^U(A) = 0$

E os tais submódulos?

Submultiplicatividade

- Tomando U e A como em (2):
  - $\beta_1^U([\mathbb{F}_p(H \setminus G)] \widehat{\otimes} [\mathbb{F}_p(G/K)]) \leq \beta_1^U(A \widehat{\otimes} [\mathbb{F}_p(G/K)]) +$
    $\beta_1^U([\mathbb{F}_p(H \setminus G)]/A \widehat{\otimes} [\mathbb{F}_p(G/K)])$
- Último termo é limitado por $\beta_1^G([\mathbb{F}_p(H \setminus G)])\beta_1^U([\mathbb{F}_p(G/K)])$
- (1) nos fornece B tal que:
  - $\beta_1^U(A \widehat{\otimes} [\mathbb{F}_p(G/K)]) \leq \beta_1^U(A \widehat{\otimes} B) + \beta_1^U(A \widehat{\otimes} [\mathbb{F}_p(G/K)]/B)$

L^2-independência

- $H \leq_c G$ é L^2-independente se

$$\beta_1^G\left(\ker\left(\left[\!\left[\mathbb{F}_p(H \setminus G)\right]\!\right] \to \mathbb{F}_p\right)\right) = 0$$

- Se H é L^2-independente, então $d(H) \leq d(G)$
- Toda retração de G é L^2-independente
- H é L^2-independente em G, $K \leq_c G$ f.g. $\Rightarrow H \cap K$ é L^2-independente em K

$$M = \ker\left(\left[\!\left[\mathbb{F}_p(H \cap K \setminus K)\right]\!\right] \to \mathbb{F}_p\right), \qquad N = \ker\left(\left[\!\left[\mathbb{F}_p(H \setminus G)\right]\!\right] \to \mathbb{F}_p\right)$$

$$\beta_1^K(N) = \beta_1^G\left(N \mathbin{\widehat{\otimes}} \left[\!\left[\mathbb{F}_p(G/K)\right]\!\right]\right) = 0$$

Corolários

- $H \leq_c G$ é inerte se $d(H \cap K) \leq d(K)$ para todo $K \leq_c G$
- Toda retração de um grupo de Dëmushkin é inerte em G
- Todo subgrupo de um grupo de Dëmushkin é virtualmente L^2-independente

Obrigado!