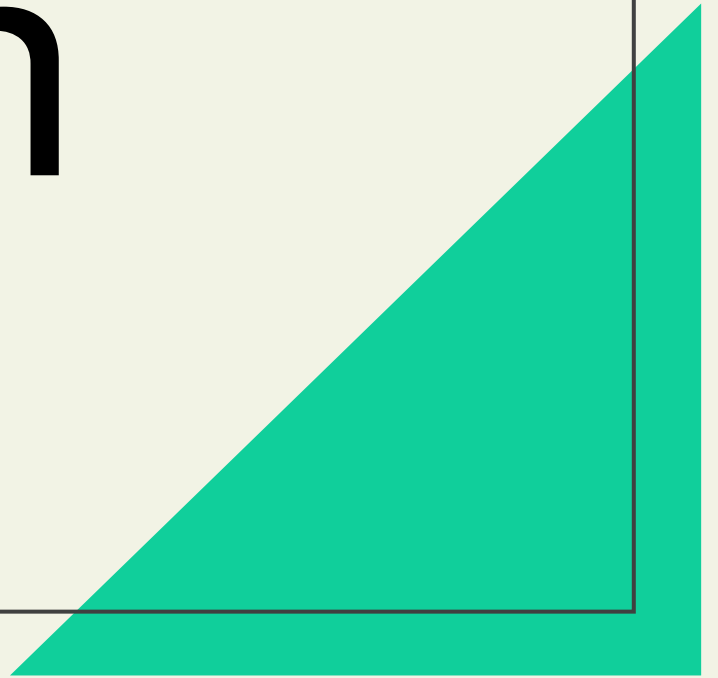


Grupos de Dëmushkin

Henrique A. M. S. Souza

Orientador: Prof. Theo A. D. Zapata



O que eu estudei?



- Grupos de Dëmushkin
 - Definição, exemplos, invariantes
- Teorema de Classificação
- M. Shusterman & P. Zalesskii (*Trans. Am. Math. Soc.* 2019)
 - Propriedade de Howson
 - Propriedade de Retração Virtual
 - Extra: produtos pro- p livres e grupos de M. Hall
- A. Jaikin-Zapirain & M. Shusterman (*Adv. Math.* 2019)
 - *Conjectura de Atiyah*
 - *Desigualdade de Hanna Neumann*
- Inércia de Dicks-Ventura para retrações.

Algumas convenções



- G = grupo pro- p
- Por simplicidade, gerador = gerador topológico
 - $d(G)$ = cardinalidade de um conjunto minimal de geradores
- $[x, y] = xyx^{-1}y^{-1}$
- $[\mathbb{F}_p G]$ = álgebra de grupo completa
- $H^n(G, \mathbb{F}_p) = H^n(G)$
- $H_n(G, \mathbb{F}_p) = H_n(G)$

Parte 1 de 3

Definições Exemplos Invariantes Classificação

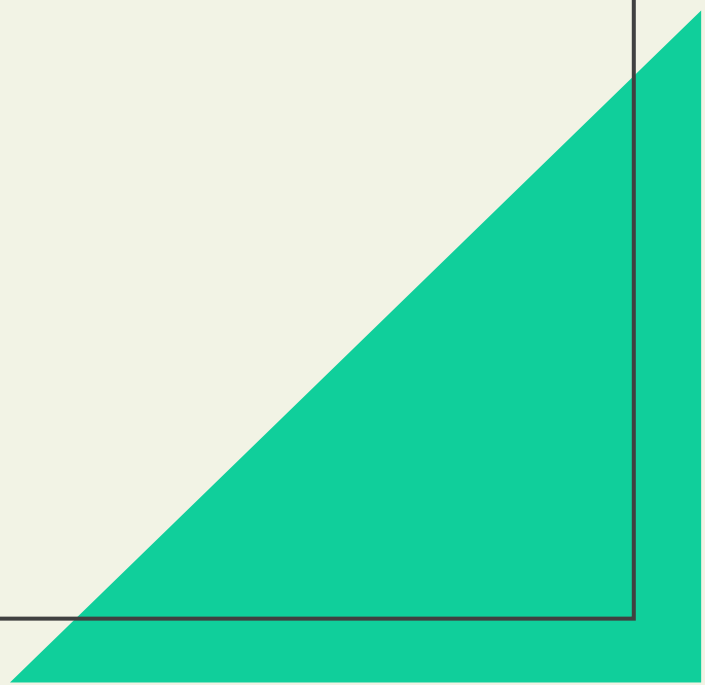


Definição

1. $H^1(G)$ finito
2. $H^2(G) \simeq \mathbb{F}_p$
3. $\cup: H^1(G) \times H^1(G) \rightarrow H^2(G)$ não degenerado
 - Infinito $\Rightarrow \cup: H^i(G) \times H^{2-i}(G) \rightarrow H^2(G)$ não degenerado
 - $\text{cd}(G) = 2$

Invariantes numéricos

- $G \simeq \langle x_1, \dots, x_d | r = 1 \rangle$
 - $d = d(G)$
- $G^{\text{ab}} \simeq \mathbb{Z}_p/q\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p^{d(G)-1}$
 - $q(G) = q$
- G infinito, $H \leq_c G$
 - $[G:H] < \infty \Rightarrow H$ é Dëmushkin
 - $[G:H] = \infty \Rightarrow H$ é pro- p livre
- Fórmula do posto: $d(U) - 2 = [G:U](d(G) - 2)$



- $d(G) = 1 \Leftrightarrow G$ é finito $\Leftrightarrow G \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
- G é abeliano $\Leftrightarrow G$ é finito ou \mathbb{Z}_p^2
- $\mathbb{Z}_p \rtimes_{1+qu} \mathbb{Z}_p \simeq \langle x, y | xyx^{-1} = y^{1+qu} \rangle$
- Completamentos pro- p de superfície
 - orientável de gênero $g \Rightarrow G_g^+$
 - não orientável de gênero $g \Rightarrow G_g^-$ ($p = 2$)

Exemplos

Invariante χ

- Módulo dualizante $I_G \simeq \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$

- Homomorfismo ciclotômico

$$\chi: G \rightarrow \text{Aut}(I_G) \simeq 1 + p\mathbb{Z}_p$$

- $J = \mathbb{Z}_p$, ação por χ
 - $\text{Der}(G, J)$ podem ser definidas arbitrariamente
- $\text{Im}(\chi) \subseteq 1 + q(G)\mathbb{Z}_p$
- $\text{scd}(G) = 3 \iff \text{Im}(\chi)$ é finita

Cálculos

G	$d(G)$	$q(G)$	$\text{Im}(\chi)$
\mathbb{Z}_p^2	2	0	$\{1\}$
$\mathbb{Z}_p \rtimes_{1+qu} \mathbb{Z}_p$	2	q	$\langle 1 + qu \rangle$
G_g^+	$2g$	0	$\{1\}$
G_g^-	g	2	$\{\pm 1\}$

Teorema de Classificação

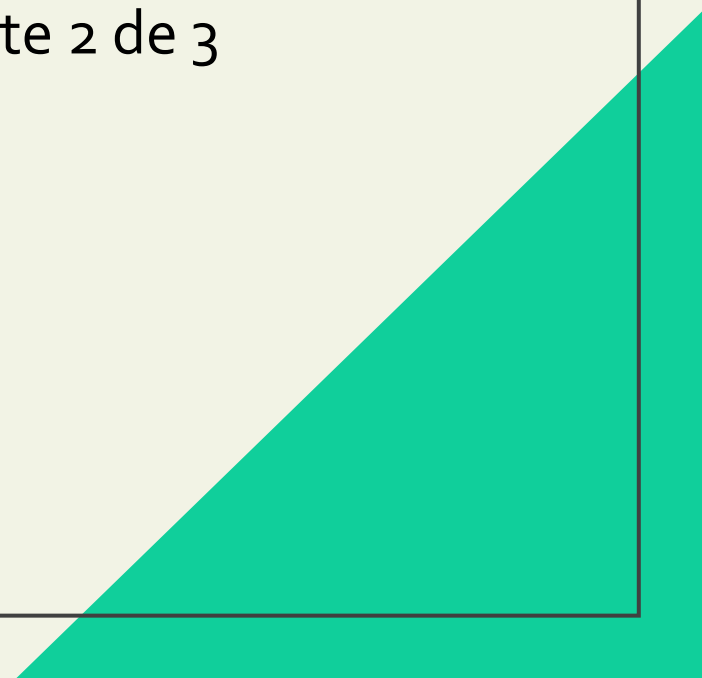
- Parcial: $G \simeq \langle x_1, \dots, x_d | r = 1 \rangle$ com $q(G) = q$
 - (1) $q \neq 2$: $r = x_1^q [x_1, x_2] \cdots [x_{d-1}, x_d]$
 - (2) $q = 2, d$ ímpar: $r = x_1^2 x_2^{2^f} [x_2, x_3] \cdots [x_{d-1}, x_d]$
 - (3) $q = 2, d$ par $r = x_1^{2+\alpha} [x_1, x_2] x_3^{2^f} [x_3, x_4] \cdots [x_{d-1}, x_d]$
- Completa:
 - (3.A) $[\text{Im}(\chi): \text{Im}(\chi)^2] = 2$: $r = x_1^{2+2^f} [x_1, x_2] \cdots [x_{d-1}, x_d]$
 - (3.B) $[\text{Im}(\chi): \text{Im}(\chi)^2] = 4$: $r = x_1^2 [x_1, x_2] x_3^{2^f} [x_3, x_4] \cdots [x_{d-1}, x_d]$

Esboço da classificação parcial

- $F = F(x_1, \dots, x_d)$
 - $F_1 = F, \quad F_{i+1} = \overline{F_i^q[F_i, F]}$
- $r \equiv \prod_{i=1}^d x_i^{qa_i} \prod_{1 \leq i < j \leq d} [x_i, x_j]^{a_{ij}} \pmod{F_3}$
- Coeficientes são controlados por
$$\eta_{x_i} \cup \eta_{x_j} \in H^2(G, \mathbb{Z}_p/q\mathbb{Z}_p)$$
- Forma simplética em
$$H^1(G, \mathbb{Z}_p/q\mathbb{Z}_p) = \langle \eta_{x_i} \rangle$$
- Descendo a série q -central.

Howson Retrações

Parte 2 de 3



Propriedade de Howson

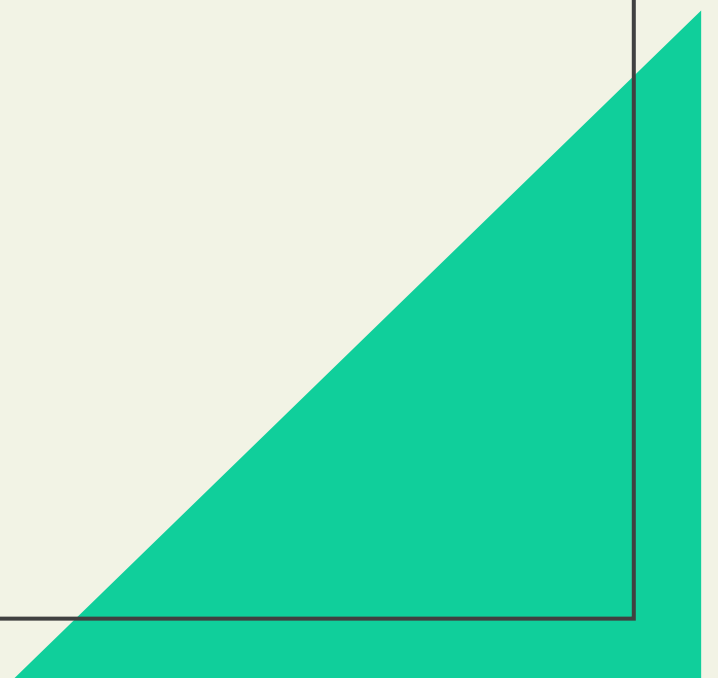
- $H, K \leq_c G$ finitamente gerados $\Rightarrow d(H \cap K) < \infty$?
- Sim, se...
 - G finito
 - $\text{rk}(G) < \infty$
 - G pro- p livre
- Sim se G for Dëmushkin
 - $d(H \cap K) - 1 \leq p^2(d(H) + d(K) - 2)^2(d(H) - 1)(d(K) - 1)$

A demonstração

- Se H ou K for aberto, $d(H \cap K) - 1 \leq (d(H) - 1)(d(K) - 1)$.
- Fazemos $n = \lfloor \log_p(d(H) + d(K) - 2) \rfloor + 1$
- Existem $H_n \leq_o H$ e $K_n \leq_o K$ com

$$[H:H_n] \text{ e } [K:K_n] \leq p^n, \quad H_n \cap K_n = H \cap K$$

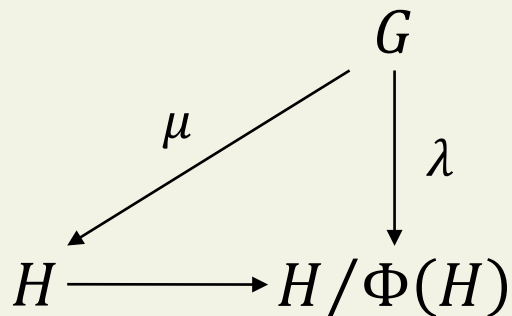
- $C = \langle H_n, K_n \rangle$ é pro- p livre
- Desigualdade de Hanna Neumann para pro- p livres



Retração

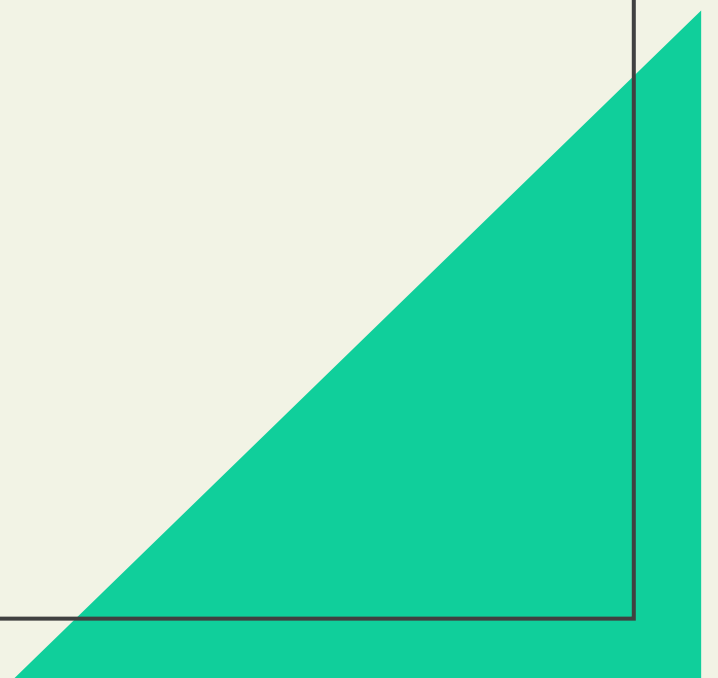
$H \leq_c G$ é uma retração se...

- existe $\tau: G \rightarrow H$ com $\tau|_H = \text{Id}_H$
- $\Leftrightarrow \exists N \trianglelefteq_c G$ tal que $G = N \rtimes H$
- $\Leftrightarrow \exists \lambda: G \rightarrow H/\Phi(H)$ e $\mu: G \rightarrow H$ tais que



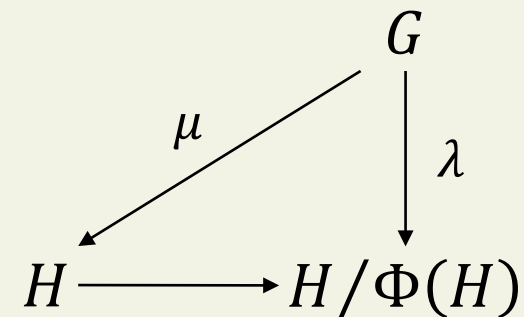
Retração virtual

- Propriedade: retração *virtual* para subgrupos f.g. $H \leq_c G$
 - Existem $H \leq_c U \leq_o G$ e $N \trianglelefteq_c U$ tal que $U = N \rtimes H$
- Grupos finitos
- Grupos abelianos f.g.
- Grupos pro- p livres f.g.
- Grupos de Demushkin com $d(G) > 2$
- O excepcional $\mathfrak{K} = \langle x, y | xyx^{-1} = y^{-1} \rangle$



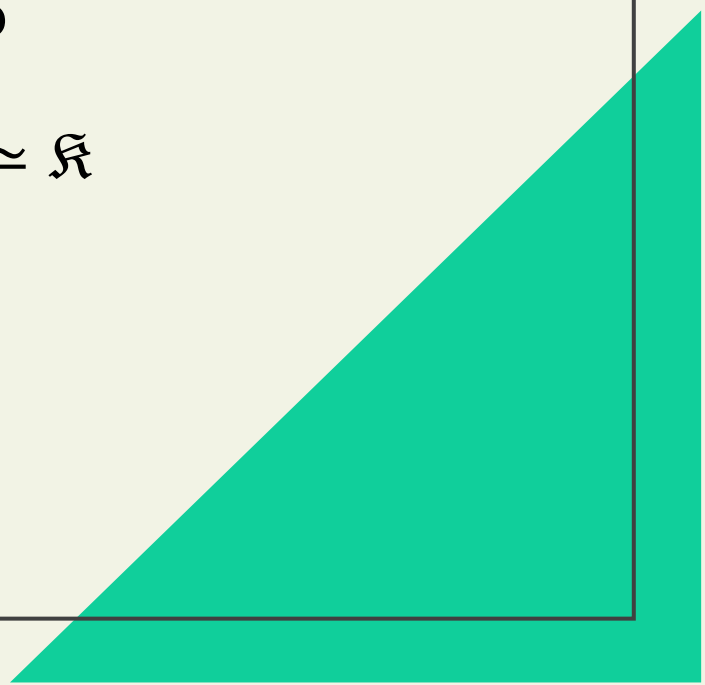
A prova ($d(G) > 2$)

- s.p.g. λ existe pela finitude de $H/\Phi(H)$
- Se $q \neq 0$, $\theta = \eta_1$ ou η_2 dependendo da paridade de d
 - Existe $H \leq_c U \leq_o G$ tal que $\theta \in \text{Im}(\text{res}_U^G)$
- Refinamento da apresentação
 - $U \simeq \langle x_1, \dots, x_d | r = 1 \rangle$ tal que $\eta(x_{2i-1}) = 0$ para todo $\eta \in \text{Im}(\text{res}_U^G)$
- λ se levanta em $\mu: U \rightarrow H$



A prova ($d(G) = 2$)

- $G = \langle x, y | xyx^{-1} = y^z \rangle$
- Se $\langle y \rangle$ é uma retração virtual, G é virtualmente abeliano
- Dëmushkin não abeliano + virtualmente abeliano $\Rightarrow G \simeq \mathfrak{K}$
- $\mathfrak{K} = \langle x, y | xyx^{-1} = y^{-1} \rangle$ tem retrações virtuais



Aplicações: Greenberg

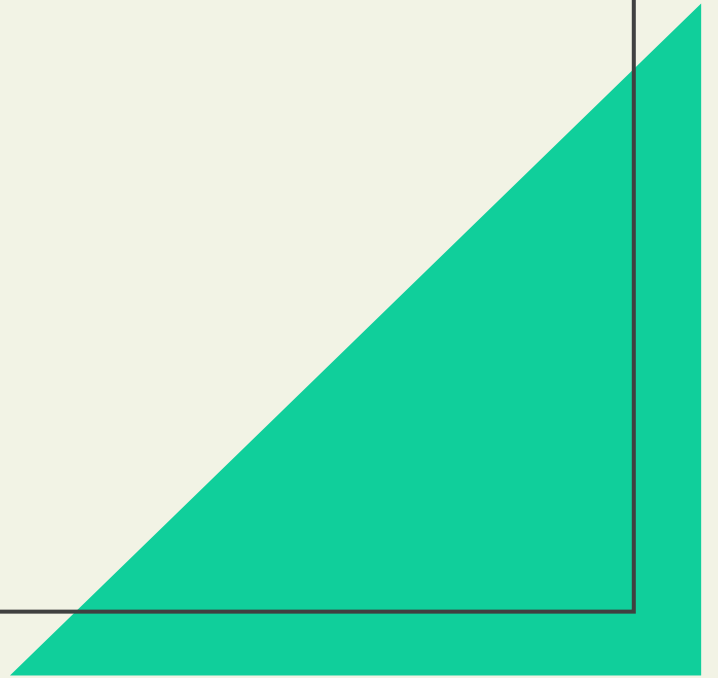
- G grupo de Dëmushkin com $d(G) > 2$
- Se retração virtual contivesse N pro- p livre normal em G
 $\Rightarrow G$ conteria \mathbb{Z}_p^2
- Centro trivial

Extensões

- G_1 e G_2 são Howson $\Rightarrow G_1 \amalg G_2$ é Howson
- G_1 e G_2 tem retrações virtuais
 $\Rightarrow G_1 \amalg G_2$ tem retrações virtuais
- G é M. Hall se todo $H \leq_c G$ f.g. é virtualmente um fator livre
- Nenhum Dëmushkin infinito é M. Hall
- G é M. Hall f.g. $\Leftrightarrow G$ é produto pro- p livre de finitos e pro- p livres

Parte 3 de 3

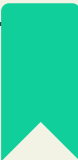
Hanna Neumann, Atiyah & Inércia



Desigualdade de Hanna Neumann

- G grupo de Dëmushkin com $d(G) > 2$
- $H, K \leq_c G$ f.g.
 - $X =$ conjunto completo de representantes de $H \setminus G / K$
- $S = S(G, H, K) = \{x \in X \mid H \cap xKx^{-1} \neq \{1\}\}$ é finito

$$\sum_{x \in S} d(H \cap xKx^{-1}) - 1 \leq (d(H) - 1)(d(K) - 1)$$


$$\beta_i^G(M) = \inf_{U \leq_o G} \frac{\dim_{\mathbb{F}_p} H_i(U, M)}{[G:U]}$$

- $\beta_i^U(M) = [G:U]\beta_i^G(M)$
- $\beta_i^G(\text{Ind}_H^G M) = \beta_i^H(M)$
- $M' \leq_c M \Rightarrow \beta_i^G(M) \leq \beta_i^G(M') + \beta_i^G(M/M')$
- $M \simeq [\mathbb{F}_p G]^d / N \Rightarrow \beta_1^G(M) = \beta_0^G(N) - d + \beta_0^G(M)$

L^2 -invariantes

Esboço da finitude de S

- S infinito $\Rightarrow \exists F \leq_c G$ pro- p livre e $H', K' \leq_c F$ f.g. com $|S(F, H', K')| = \infty$
- Como $[\mathbb{F}_p H']$ -módulos:

$$[\mathbb{F}_p(F/K')] \simeq \bigsqcup_{x \in X'} [\mathbb{F}_p(H'/H' \cap xK'x^{-1})]$$

- Cada $H_1(H', [\mathbb{F}_p(H'/H' \cap xK'x^{-1})])$ é finito
- $\dim_{\mathbb{F}_p} \mathrm{Tor}_1^{[\mathbb{F}_p F]}([\mathbb{F}_p(H' \setminus F)], [\mathbb{F}_p(F/K')])$

Estratégia da desigualdade

- $\beta_1^G(\llbracket \mathbb{F}_p(H \setminus G) \rrbracket) = d(H) - 1, \quad \beta_1^G(\llbracket \mathbb{F}_p(G/K) \rrbracket) = d(K) - 1$
- $\beta_1^G(\llbracket \mathbb{F}_p(H \setminus G) \rrbracket \widehat{\otimes} \llbracket \mathbb{F}_p(G/K) \rrbracket) = \sum_{x \in S} d(H \cap xKx^{-1}) - 1$
- Submultiplicatividade \Rightarrow desigualdade
- Conjectura de Atiyah: $\beta_0^G(M)$ é um inteiro
 - $\llbracket \mathbb{F}_p(H \setminus G) \rrbracket$ e $\llbracket \mathbb{F}_p(G/K) \rrbracket$ tem muitos submódulos com β_1^G nulo
- Subaditividade \Rightarrow submultiplicatividade

Atiyah & Kaplansky

- Vale se G é analítico p -ádico livre-de-torção
- Dëmushkin é residualmente isso
- $\beta_0^G(M)$ arbitrariamente perto de um inteiro
 - $\beta_1^G(M)$ também é inteiro
- $[\mathbb{F}_p G]$ não possui divisores de 0

G grupo de Dëmushkin infinito, $H \leq_c G$ f.g.

1. Todo $[\mathbb{F}_p G]$ -módulo M finitamente apresentado sobre H possui um submódulo aberto B tal que $\beta_1^H(B) = 0$

2. $\exists U \leq_o G$ e um $[\mathbb{F}_p U]$ -submódulo A de $[\mathbb{F}_p(H \setminus G)]$ tais que:

$$I. \quad \dim_{\mathbb{F}_p}([\mathbb{F}_p(H \setminus G)]/A) \leq \beta_1^G([\mathbb{F}_p(H \setminus G)])$$

$$II. \quad \beta_1^U(A) = 0$$

E os tais
submódulos?

Submultiplicatividade

- Tomando U e A como em (2):

- $$\beta_1^U(\llbracket \mathbb{F}_p(H \setminus G) \rrbracket \widehat{\otimes} \llbracket \mathbb{F}_p(G/K) \rrbracket) \leq \beta_1^U(A \widehat{\otimes} \llbracket \mathbb{F}_p(G/K) \rrbracket) + \beta_1^U(\llbracket \mathbb{F}_p(H \setminus G) \rrbracket / A \widehat{\otimes} \llbracket \mathbb{F}_p(G/K) \rrbracket)$$

- Último termo é limitado por $\beta_1^G(\llbracket \mathbb{F}_p(H \setminus G) \rrbracket) \beta_1^U(\llbracket \mathbb{F}_p(G/K) \rrbracket)$

- (1) nos fornece B tal que:

- $$\beta_1^U(A \widehat{\otimes} \llbracket \mathbb{F}_p(G/K) \rrbracket) \leq \beta_1^U(A \widehat{\otimes} B) + \beta_1^U(A \widehat{\otimes} \llbracket \mathbb{F}_p(G/K) \rrbracket / B)$$

L^2 -independência

- $H \leq_c G$ é L^2 -independente se

$$\beta_1^G \left(\ker(\llbracket \mathbb{F}_p(H \setminus G) \rrbracket \rightarrow \mathbb{F}_p) \right) = 0$$

- Se H é L^2 -independente, então $d(H) \leq d(G)$
- Toda retração de G é L^2 -independente
- H é L^2 -independente em G , $K \leq_c G$ f.g. $\Rightarrow H \cap K$ é L^2 -independente em K

$$M = \ker(\llbracket \mathbb{F}_p(H \cap K \setminus K) \rrbracket \rightarrow \mathbb{F}_p), \quad N = \ker(\llbracket \mathbb{F}_p(H \setminus G) \rrbracket \rightarrow \mathbb{F}_p)$$

$$\beta_1^K(N) = \beta_1^G(N \widehat{\otimes} \llbracket \mathbb{F}_p(G/K) \rrbracket) = 0$$

Corolários

- $H \leq_c G$ é inerte se $d(H \cap K) \leq d(K)$ para todo $K \leq_c G$
- Toda retração de um grupo de D emushkin    inerte em G
- Todo subgrupo de um grupo de D emushkin    virtualmente L^2 -independente

Obrigado!

