Universidade de Brasília

Grupos de Dëmushkin

Henrique Augusto Mendes da Silva e Souza

Orientador: Dr. Theo Allan Darn Zapata

Departamento de Matemática
Universidade de Brasília

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de
Mestre em Matemática

Brasília, 26 de janeiro de 2021

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Grupos de Dëmushkin

por

Henrique Augusto Mendes da Silva e Souza*

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos para obtenção do grau de

MESTRE EM MATEMÁTICA

Brasília, 26 de janeiro de 2021.

Comissão Examinadora:

Theo Allan Darn Zapata

Prof. Dr. Theo Allan Darn Zapata – MAT/UnB (Orientador)

Profa. Dra. Dessislava Hristova Kochloukova – IME/Unicamp (Membro)

Prof. Dr. Ilir Snopche – IM/UFRJ (Membro)

Igor dos Santos Lima

Prof. Dr. Igor dos Santos Lima – MAT/UnB (Membro)

Ficha catalográfica elaborada automaticamente,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

SSO729g

Souza, Henrique Augusto Mendes da Silva e
Grupos de Dëmushkin / Henrique Augusto Mendes da Silva e Souza; orientador Theo Allan Darn Zapata. -- Brasília, 2021.
159 p.

Tese (Mestrado em Matemática) --Universidade de Brasília, 2021.

1. Grupos de Dëmushkin. 2. Propriedade de Howson. 3. Retração Virtual. 4. Grupos de M. Hall. 5. Conjectura de Hanna Neumann. I. Zapata, Theo Allan Darn, orient. II. Título.

Dedico este trabalho a todes us colegas que me acompanharam como aluno da Universidade de Brasília, tanto dentro e como fora do curso de matemática. Toda a nossa ciência vive apenas enquanto for diálogo, comunicação, troca. Serei eternamente grato por todas as oportunidades que vocês me ofereceram de vivenciá-la.

Agradecimentos

À minha família, e, em especial, aos meus pais[1] Moacyr e Maria, pelo constante apoio e suporte que me proveram ao longo da vida. Mesmo em face das incertezas, vocês nunca hesitaram em me incentivar a correr atrás dos meus sonhos e objetivos. Mesmo nas quedas e tropeços, vocês sempre me acolheram e me estimularam a continuar mirando alto. Sei que, em vocês, sempre encontrarei um porto seguro.

Ao meu orientador, o professor Theo Zapata, que desde meus primeiros passos na matemática me acompanhou, orientou e estimulou, e que não media esforços em garantir aos seus alunos a oportunidade de receber a melhor formação matemática que o departamento podia oferecer. Não obstante, a seriedade com trabalho que desenvolvemos nunca impediu que nossos encontros, reuniões e mensagens fossem repletos de leveza, brincadeira e diversão. O senhor é, e sei que continuará sendo, uma grande inspiração para mim e para todos os seus orientandos e futuros colaboradores (como espero, um dia, me tornar).

À minha namorada, companheira, parceira de toda hora, paixão, confidente e amiga: Carols[1], 私の愛する人。 Ela quem esteve presente desde o dia 1 do meu curso de mestrado, quem acompanhou de perto as alegrias e as dificuldades, quem comemorou comigo os sucessos e me consolou nos reveses, quem me inspira o com zelo, dedicação e carinho à tudo que se propõe a fazer e quem me ouviu falar incessantemente e incansavelmente sobre as diversas generalidades da vida matemática com ouvidos atentos e comentários alegres (além de uma paciência estoica) pelos últimos dois anos. Que venham muitos mais momentos compartilhados pela frente ♥.

Ao Nowras[1], que se mostrou mais do que um colega e parceiro de estudos: um bom amigo. Pelos conselhos matemáticos e pessoais, pelas noites (e, as vezes, também tardes) no bar, por me apresentado desde ao Go até às álgebras simples centrais. No momento de submissão deste trabalho, ainda esperamos pela próxima oportunidade para uma bebida e uma boa partida em um tabuleiro 19x19.

À Bela e à Vivi, preciosas amizades com as quais não só cresci e amadureci como pessoa (e fiz tudo isso me divertindo horrores) como também experimentei a matemática que não

[1] que também leram, corajosamente, este trabalho e estiveram presentes em todas as suas exposições e na sua defesa.

se aprende na faculdade: a matemática conversada, cantada, discutida, dançada, desenhada, interpretada, filmada, transmitida, compartilhada. Na dedicatória, repito a frase que aprendi convivendo com vocês: "Toda a nossa ciência vive apenas enquanto for diálogo, comunicação, troca". Aguardo, ansiosamente, nossas empreitadas futuras.

Às amigas que me tornaram toda a jornada matemática melhor de uma forma especial: à Luarinha (um beijo na Luna!), minha primeira amizade no curso, minha chefe no meu primeiro emprego, uma grande colega nos estudos e nas disciplinas e, hoje, uma grande professora e carinhosa mãe; à Mel, vida e alma daquele departamento, companheira de festas, fofocas, estudos e intermináveis risadas; à Pat e à Bárbara, companheiras para toda situação, pessoas queridíssimas que rapidamente passaram de desconhecidas no corredor à grandes amigas que carregarei sempre no peito.

Às amizades de longa data que me seguiram nos anos de universidade: Brunão, Jobim, Keka, Lilice, Marie, Ninna, Pablo, Ruan, Titi, Tomé, Tutu, Viny, Vitor, Zepp; mesmo os que estão distantes, o carinho estará sempre próximo.

Às amizades e parcerias que fiz na matemática: Adler, Amadeus, Gabriela, Gérman, João, Joana, Fleury, Mari, Miranda, Mirelly, Pedro, Roberto, Rodriguinho, Zaban.

Às amizades que fiz durante os anos de universidade: Bah, Clarinha, Estevan, Flavinha, Hirata, Luana, Lucas Riecken, Manu, Marina, Marvin, Nathinha, Paulinha, Raul, Thalito, Xiups.

À Profa. Sheila Campos, que não só esteve presente me recebeu de portas abertas em todas as etapas do mestrado, como também sempre me incentivou a continuamente aprender e dar o meu melhor. Como coordenadora dos seminários durante o estágio final do curso, também exibiu atenção e dedicação ímpares em fornecer a melhor experiência académica possível durante o período excepcional de pandemia.

Aos mestres que inspiraram na universidade: Prof. André Caldas, Profa. Aline Pinto, Prof. Daniel Cajueiro, Prof. Elves Barros, Prof. Guram Donadze, Prof. João Paulo dos Santos, Prof. Martino Garonzi, Prof. Noraí Rocco.

Aos servidores e técnicos da Universidade de Brasília, do Departamento de Matemática e do Programa de Pós-Graduação, que trabalham arduamente para manter o programa funcionando com excelência. Em especial, ao professor coordenador Carlos Alberto e às servidoras Ingrid de Sousa e Marta Chagas, que estiveram sempre presentes para auxiliar os alunos do curso.

À Bruna Scafuto, cujos questionamentos e conselhos não só vêm me ensinando a viver uma vida mais plena, como também foram valor para superar os desafios pessoais e interpessoais que surgiram na carreira acadêmica.

À todas as amizades que não foram mencionadas, mas que estão registradas na memória deste que escreve.

À CAPES e ao CNPq pelas bolsas de fomento à pesquisa concedidas.

“Le savant doit ordonner; on fait la science avec des faits comme une maison avec des pierres ; mais une accumulation de faits n’est pas plus une science qu’un tas de pierres n’est une maison.”

(Jules Henri Poincaré)

Figura 1 Сергей Петрович Дёмушкин (Sergey Petrovich Dëmushkin), nascido em Moscou em 1932. Fonte da imagem: [Sol96, p. xliv].

Resumo

Os grupos de Dëmushkin compõem uma classe de destaque entre os grupos profinitos: são aqueles grupos pro-p que satisfazem uma condição cohomológica análoga à clássica dualidade de Poincaré em dimensão 2. Eles ocorrem naturalmente como quocientes pro-p maximais de grupos de Galois de corpos locais e completamentos pro-p de grupos de superfície. Esta dissertação apresenta a demonstração do Teorema de Classificação dos Grupos de Dëmushkin como obtido através dos trabalhos de S. Dëmushkin, J.P. Serre e J. Labute entre 1961 e 1967. Esta dissertação também coleta, em uma única fonte, as recentes demonstrações de 2019 e 2020 da validade entre os grupos de Dëmushkin da propriedade de Howson, da existência de retrações virtuais para subgrupos topologicamente finitamente gerados e da conjectura de Hanna Neumann, seguindo os artigos publicados por P. Zalesskii, M. Shusterman e A. Jaikin-Zapirain, bem como a caracterização dos grupos pro-p que satisfazem a propriedade de M. Hall. Para estes fins, a teoria (co-)homológica dos grupos profinitos e pro-p e algumas de suas aplicações são desenvolvidas a partir da álgebra elementar dos grupos, além de também realizarmos um estudo da teoria de Bass-Serre profinita de grupos agindo em árvores.

Palavras-chave: Grupos de Dëmushkin; Propriedade de Howson; Retração Virtual; Grupos de M. Hall; Conjectura de Hanna Neumann.

Abstract

Dëmushkin groups comprise an important class of profinite groups: they are pro-p groups which satisfy a cohomological condition analogous to the classical Poincaré duality in dimension 2. They occur naturally as maximal pro-p quotients of Galois groups of local fields and p-completions of surface groups. This dissertation presents the proof of the Classification Theorem of Dëmushkin Groups as obtained through the works of S. Dëmushkin, J.P. Serre and J. Labute between 1961 and 1967. This dissertation also gathers, in a single source, the recent 2019 and 2020 proofs of the validity among Dëmushkin groups of Howson's property, of the existence of local retractions for topologically finitely generated subgroups and of the Hanna Neumann conjecture, following the papers published by P. Zalesskii, M. Shusterman and A. Jaikin-Zapirain, as well as the characterization of the pro-p groups which satisfy M. Hall's property. In the process, the homological and cohomological theories of profinite and pro-p groups and some of their applications are developed from the elementary algebra of groups, and we also include a study of the profinite Bass-Serre of groups acting on trees.

Keywords: Dëmushkin groups; Howson's property; virtual retraction; M. Hall groups; Hanna Neumann conjecture.

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Sumário

Introdução

Os grupos profinitos e pro-p compõem uma importante classe de grupos topológicos, sejam por suas conexões históricas com a Teoria de Galois ([NSW08, pp. vii-xii]), sejam por suas recentes aplicações na Mecânica Quântica ([VVZ94, pp. ix-xviii]) ou seja pelo interesse em suas próprias estruturas algébricas ([RZ10, pp. ix-xi]). Dentre esta classe de grupos, os grupos de Dëmushkin que dão nome à este trabalho ocupam um lugar de destaque: são grupos que satisfazem uma condição cohomológica análoga a clássica dualidade de Poincaré para variedades reais em dimensão 2.

De forma mais precisa, um grupo pro-p G é dito um grupo de Dëmushkin se os grupos de cohomologia contínua $H^i(G, \mathbb{F}_p) = H^i(G)$ de G com coeficientes no corpo finito de p-elementos $\mathbb{F}_p$ satisfazem três condições:

D1 $H^1(G)$ é finito;

D2 $\dim_{\mathbb{F}_p} H^2(G) = 1$;

D3 O produto cup
$$\cup\colon H^1(G) \times H^1(G) \to H^2(G)$$
é uma forma bilinear não degenerada.

Como os grupos $H^1(G)$ e $H^2(G)$ determinam propriedades das apresentações pro-p minimais de G, temos que **D1** e **D2** são equivalentes com G possuindo uma apresentação minimal sobre $d \in \mathbb{N}$ geradores $x_1, \cdots, x_d$ com apenas um relator r. Além disto, a condição **D3** irá controlar as possíveis expressões para r em função de cada conjunto gerador de G.

O interesse original na álgebra dos grupos de Dëmushkin se deu pelo trabalho de S. Dëmushkin, que em seu artigo de 1961 [Dë61] descreveu os invariantes numéricos d e q, bem como forneceu uma fórmula para a apresentação pro-p de alguns casos particulares destes em termos de d e q. Os trabalhos posteriores por J.P. Serre [Ser64] e J. Labute [Lab67] obtiveram ao longo dos anos 60 do século XX uma classificação completa destes grupos em termos de seus invariantes numéricos d e de seus invariantes ciclotômicos (algébricos) χ. Os grupos de Dëmushkin também ocorrem naturalmente como completamentos pro-p de grupos fundamentais de superfícies compactadas [Ser64, p. 147] e como quocientes pro-p maximais de grupos fundamentais étale geométricos [Win84, p. 557]. Assim, a estrutura algébrica dos grupos de Dëmushkin, além de ser rica por si só e exibir fenômenos reminiscentes do comportamento de grupos abstratos de superfícies, também possui importantes aplicações aritméticas.

Os dois objetivos desta dissertação são:

1. Fornecer uma demonstração detalhada do Teorema de Classificação dos Grupos de Dëmushkin e uma fórmula para seu invariante ciclotômico χ em função desta classificação, como realizado em [Lab67, Teo. 3 e 4].

2. Explorar e demonstrar desenvolvimentos recentes acerca de propriedades combinatórias dos grupos de Dëmushkin: as propriedades de Howson, retrações virtuais para subgrupos finitamente gerados e a propriedade de M. Hall, seguindo [SZ19], e a desigualdade de Hanna Neumann seguindo [JZS19].

Cada uma destas compõem as duas partes deste trabalho. A parte I resume as propriedades elementares de grupos profinitos e pro-p, da homologia e da cohomologia destes, além de outras construções necessárias para o desenvolvimento do texto, e conclui com a exposição do Teorema de Classificação e seus corolários. A parte II é dedicada ao estudo e à demonstração das propriedades mencionadas no seguindo objetivo.

A principal contribuição deste trabalho está no ato de colecionar os resultados supracitados em uma única fonte, utilizando convenções e notações modernas e unificadas. A exposição em português é original e, na visão do autor, poderá contribuir com a difusão do tema no Brasil e em outros países falantes da língua.

Esta dissertação busca, por um lado, refletir e formalizar a trajetória e o trabalho do autor como aluno do Programa de Pós-Graduação do Departamento de Matemática da Universidade de Brasília. Entretanto, este estudo começou alguns anos antes, ainda como aluno de iniciação científica sob o mesmo orientador, investigando a cohomologia dos grupos finitos e profinitos. Desta forma, é esperado do autor que este cumpra os objetivos da dissertação resumindo a parte da exposição que contenha os fatos mais elementares acerca de grupos profinitos, e dê preferência às demonstrações dos resultados principais. Este foi o princípio que guiou a estrutura e a organização dos tópicos do presente trabalho, descrita a seguir.

O Capítulo 1 resume, com o mínimo de demonstrações, os conceitos, proposições e teoremas sobre grupos profinitos, a (co)homologia destes, as construções pro-p livres e outras miscelâneas que serão aplicadas ao estudo dos grupos de Dëmushkin nos capítulos seguintes.

O Capítulo 2 é dedicado a um estudo detalhado das propriedades elementares dos grupos de Dëmushkin, de seus invariantes d, q e χ, do Teorema de Classificação e de seus corolários.

Inicialmente, o foco é dado ao estudo de exemplos concretos destes grupos como $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, grupos de Dëmushkin “pequenos” como grupos pro-p analíticos p-ádicos e completamentos pro-p de grupos de superfícies compactas. Utilizando a teoria cohomológica desenvolvida no Capítulo 1, este capítulo também fornece a demonstração do Teorema de Classificação e sua aplicação ao estudo do invariante ciclotômico χ, obtendo como corolário uma fórmula para este em termos dos geradores de uma base “canônica”. A principal referência desta exposição é [Lab67].

No Capítulo 3, é feita a demonstração de que grupos de Dëmushkin satisfazem a versão pro-p da propriedade de Howson. A propriedade de Howson, também conhecida como FGIP (*Finitely Generated Intersection Property*, ou propriedade da interseção finitamente gerada), descreve os grupos G cujas interseções $H \cap K$ de quaisquer pares H e K de subgrupos finitamente gerados é também finitamente gerada. Em seu artigo de 1954 [How54], A. Howson demonstrou que todos os grupos abstratos livres satisfazem esta propriedade. Utilizando a noção de um *subgrupo topologicamente finitamente gerado*, a propriedade de Howson possui um análogo profinito evidente [Lub82, Prop. 3.6]. Desde o trabalho de Howson, a validade desta propriedade foi estudada para diversas classes de grupos abstratos e profinitos. Neste capítulo, também é feita a demonstração de que esta propriedade é fechada para produtos pro-p livres, seguindo [SZ19].

O Capítulo 4 se dedica a explorar as propriedades de existência de retrações virtuais para subgrupos finitamente gerados em grupos de Dëmushkin e sua conexão com a versão pro-p da propriedade de M. Hall: a existência de subgrupos abertos contendo um dado subgrupo finitamente gerado como fator livre. Enquanto nenhum grupo de Dëmushkin infinito satisfaz a propriedade de M. Hall, muitos grupos de Dëmushkin satisfazem a propriedade de retrações virtuais. O objetivo deste capítulo é demonstrar a caracterização dos grupos de Dëmushkin com a propriedade de retrações virtuais e a caracterização dos grupos pro-p com a propriedade de M. Hall seguindo também [SZ19].

O último capítulo busca fornecer uma demonstração da validade de uma versão pro-p da Conjectura Forte de Hanna Neumann em grupos de Dëmushkin, seguindo [JZS19]. Além de demonstrar sua homônima propriedade para grupos livres abstratos, A. Howson obteve uma cota superior para o número minimal de geradores $d(H \cap K)$ da interseção $H \cap K$ em termos dos números minimais de geradores $d(H)$ e $d(K)$. Esta cota foi melhorada por H. Neumann em [Neu57], que também conjecturou a desigualdade:

$$d(H \cap K) - 1 \leq (d(H) - 1)(d(K) - 1)\,.$$

A versão mais forte

$$\sum_{x\in H\backslash G/K}\big(d(H\cap xKx^{-1})-1\big)\leq(d(H)-1)(d(K)-1)$$

ficou conhecida como a Conjectura Forte de Hanna Neumann, onde H e K representam subgrupos finitamente geradores de um grupo livre abstrato. Adicionamente, neste capítulo os gradientes homológicos são combinados com as técnicas homológicas da pré-publicação [AJZ20] para obter uma demonstração de que todas as retrações de um grupo de Dëmushkin são inertes.

O Apêndice A contém as definições e demonstrações de algumas propriedades de bases simpléticas e subespaços isotrópicos para formas simpléticas definidas em anéis locais com corpo de resíduos possuindo característica $p>0$. A principal referência é [SZ19], e estes resultados são referenciados nos Capítulos 2 e 4.

O Apêndice B reúne as demonstrações de diversas afirmações relacionado as apresentações de um G-módulo profinito p-aniquilado M sobre um grupo pro-p G e os grupos de homologia $H_i(G,M)$. A principal referência seguida é [JZS19], e estes resultados são utilizados no Capítulo 5.

Notação

Utilizamos os símbolos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$ para denotar os respectivos conjuntos numéricos dos números naturais, inteiros, racionais e reais. Adotamos a convenção de que $\mathbb{N}$ contém 0. O grupo aditivo cíclico de m elementos é denotado por $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$, e o corpo finito de p elementos é denotado por $\mathbb{F}_p$ para diferenciá-lo de sua estrutura aditiva $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. O corpo dos números p-ádicos é denotado por $\mathbb{Q}_p$, e o anel dos inteiros p-ádicos é denotado por $\mathbb{Z}_p$.

Escrevemos $H\leq_c G$ para denotar um subgrupo fechado H de um grupo profinito G, e $U\leq_o G$ para denotar um subgrupo aberto U, do inglês *closed* e *open* respectivamente. A notação $H\trianglelefteq_c G$ e $U\trianglelefteq_o G$ é utilizada para denotarmos subgrupos normais fechados e subgrupos normais abertos, respectivamente. Utilizamos $d(G)$ para denotar a cardinalidade de um conjunto minimal de geradores topológicos de um grupo profinito G, ou seu posto. Utilizamos $\mathrm{rk}(G)$, do inglês *rank*, para denotar seu posto-de-subgrupos, isto é, o supremo dos postos $d(H)$ onde $H\leq_c G$. Os grupos $\mathrm{Hom}(G,H)$ entre grupos topológicos G e H são sempre dados pelos homomorfismos contínuos de G em H.

Se Λ é um anel profinito e X é um conjunto qualquer, $[\Lambda X]$ denota o Λ-módulo livre abstrato sobre o conjunto X. Se X é um espaço profinito, $[[\Lambda X]]$ denota o Λ-módulo livre profinito sobre o espaço profinito X. Em particular, $[[\Lambda G]]$ denota a álgebra de grupo completa de um grupo profinito G sobre um anel profinito Λ.

Dados elementos x, y de um grupo abstrato ou profinito G, o comutador de x e y é denotado por

$$[x, y] = xyx^{-1}y^{-1}\,.$$

Segundo [Ser17, p. 29], esta é uma convenção "mais usual". Contudo, ela altera o enunciado da fórmula para o invariante χ de um grupo de Dëmushkin (compare o Teorema 2.3.13 e [Lab67, Teo. 4]). Optamos, então, por seguir esta que coincide com a adotada no trabalho original de S. Dëmushkin [Dë61]. O subgrupo derivado $[G, G]$ (ou subgrupo comutador) de um grupo topológico G é o fecho do subgrupo abstrato gerado por todos os comutadores $[x, y]$ com $x, y \in G$. Este é o núcleo da abelianização $G \to G^{\mathrm{ab}}$, e independe da escolha de convenção para a definição dos comutadores individuais $[x, y]$.

O completamento pro-$\mathcal{C}$ de um grupo abstrato G, onde $\mathcal{C}$ é uma classe de grupos finitos, é denotado por $\widehat{G}_{\mathcal{C}}$. O completamento profinito é denotado apenas por $\widehat{G}$, e o completamento pro-p é denotado apenas por $\widehat{G}_p$.

O produto cartesiano de dois grupos topológicos G e H é denotado por $G \times H$. Se $\{G_i\}_{i\in I}$ denota uma família de grupos topológicos, seu produto é denotado por

$$\prod_{i\in I} G_i\,.$$

O produto pro-p livre é denotado por $G \coprod H$ ou

$$\coprod_{i\in I} G_i\,.$$

O grupo fundamental de um grafo de grupos $\mathcal{G}$ sobre um grafo profinito Γ é denotado por $\Pi_1(\mathcal{G}, \Gamma)$. A soma direta de G-módulos grupos discretos M_i é denotada por

$$\bigoplus_{i\in I} M_i\,,$$

e coincide com o produto direto no caso em que I é finito. A soma direta de G-módulos profinitos M_i é denotada por

$$\bigsqcup_{i\in I} M_i\,.$$

Se G é um grupo pro-p, denotamos os grupos de cohomologia $H^i(G, \mathbb{F}_p)$ e os grupos de homologia $H_i(G, \mathbb{F}_p)$ com coeficientes no G-módulo discreto $\mathbb{F}_p$ simplesmente por $H^i(G)$ e $H_i(G)$, respectivamente. Para todo subgrupo fechado H de G e H-módulo discreto M,

$\mathrm{Coind}_H^G(M)$ denota o G-módulo coinduzido $\mathrm{Hom}_H(G, M)$. Se M é um $[[\Lambda H]]$-módulo profinito, $\mathrm{Ind}_H^G(M)$ denota o $[[\Lambda G]]$-módulo induzido $[[\Lambda G]] \widehat{\otimes}_{[[\Lambda H]]} M$.

Se V é um espaço vetorial sobre um corpo κ, então seu espaço dual $\mathrm{Hom}_\kappa(V, \kappa)$ é denotado por V^*. Se M é um grupo abeliano profinito ou discreto e de torção, seu dual de Pontryagin $\mathrm{Hom}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ é denotado por $M^\vee$.

As seguintes expressões em *Fraktur* se referem às respectivas categorias:

$\mathfrak{set}$	–	Conjuntos
$\mathfrak{Grp}$	–	Grupos abstratos
$\mathfrak{ab}$	–	Grupos abelianos abstratos
pro-$\mathfrak{ab}$	–	Grupos profinitos abelianos
$\mathfrak{mod}^{\text{esq}}(R)$	–	Módulos abstratos à esquerda sobre um anel abstrato R
$\mathfrak{mod}^{\text{dir}}(R)$	–	Módulos abstratos à direita sobre um anel abstrato R
$\mathfrak{Dmod}^{\text{esq}}(\Lambda)$	–	Módulos discretos à esquerda sobre um anel profinito Λ
$\mathfrak{Dmod}^{\text{dir}}(\Lambda)$	–	Módulos discretos à direita sobre um anel profinito Λ
$\mathfrak{Pmod}^{\text{esq}}(\Lambda)$	–	Módulos profinitos à esquerda sobre um anel profinito Λ
$\mathfrak{Pmod}^{\text{dir}}(\Lambda)$	–	Módulos profinitos à direita sobre um anel profinito Λ
$\mathfrak{Dgmod}(G)$	–	Módulos discretos à esquerda sobre um grupo profinito G
$\mathfrak{Pgmod}(G)$	–	Módulos profinitos à esquerda sobre um grupo profinito G

Parte I

Notum terram

Capítulo 1

Grupos, anéis, grafos, e módulos

Neste capítulo, iremos colecionar as definições e alguns resultados acerca de grupos profinitos e pro-p que serão utilizados ao longo de todas os capítulos subsequentes. Nosso objetivo é apenas reunir os enunciados dos teoremas e convenções como serão utilizados adiante. Este objetivo guiou a escolha de uma exposição enxuta e com o mínimo de demonstrações. O conteúdo aqui exposto também é, em sua maioria, detalhadamente coberto pela literatura, como pode ser observado em [Ser97], [RZ10] e [Rib17] por exemplo. De todo modo, os enunciados dos principais resultados aqui listados vêm acompanhados de uma referência equivalente na bibliografia.

1.1 Grupos profinitos e pro-p

Um *espaço profinito* é um espaço topológico compacto, Hausdorff e totalmente desconexo. Um *grupo profinito* é um grupo topológico G tal que G seja profinito como espaço topológico. Como G é localmente compacto e totalmente desconexo, G possui um sistema fundamental de vizinhanças da unidade formado por subgrupos normais abertos $\{U_i\}_{i\in I}$ e, portanto, de índice finito, por compacidade. Assim, um grupo G é profinito se, e somente se, G é isomorfo a algum limite inverso de grupos finitos discretos. Neste capítulo, G sempre denotará um grupo profinito.

Os primeiros e mais simples exemplos de grupos profinitos são os grupos finitos discretos, o grupo aditivo dos inteiros p-ádicos

$$\mathbb{Z}_p = \varprojlim_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}\,,$$

e o grupo aditivo dos inteiros profinitos

$$\widehat{\mathbb{Z}} = \varprojlim_{m\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \simeq \prod_{p \text{ primo}} \mathbb{Z}_p\,.$$

Temos que todo subgrupo fechado H de G é novamente profinito. Por compacidade, um subgrupo $H \leq G$ é aberto se, e somente se, H é fechado e possui índice finito. Utilizamos a notação $H \leq_c G$ para um subgrupo fechado de G e $H \leq_o G$ para um subgrupo aberto de G em acordo com a literatura em inglês para *closed* e *open* respectivamente.

Se $\{U_i\}_{i\in I}$ denota a família de subgrupos normais abertos de G, então para todo subgrupo fechado $H \leq_c G$ definimos o número supernatural:

$$[G\colon H] = \mathrm{mdc}\{[G/U_i\colon H/(H\cap U_i)] \mid i \in I\} = \prod_{p \text{ primo}} p^{a_p}\,.$$

O *índice* de um subgrupo fechado H de G é o número supernatural $[G\colon H]$. A *ordem* $|G|$ de G é igual ao índice $[G\colon \{1\}]$.

Dado um número primo p, dizemos que G é um grupo *pro-p* se G é isomorfo ao limite inverso de p-grupos finitos discretos. Em outras palavras, G é um grupo pro-p se sua ordem $|G|$ é uma potência de p. Todo grupo profinito G possui algum subgrupo fechado pro-p maximal G_p, e todo tal subgrupo é chamado de *subgrupo p-Sylow* de G.

No Capítulo 2, necessitaremos de compreender a estrutura do subgrupo p-Sylow de $\mathbb{Z}_p^\times$, o grupo multiplicativo dos invertíveis em $\mathbb{Z}_p$. Para todo primo p e $1 \leq f \leq \infty$, defina o subgrupo multiplicativo $\mathbb{U}_p^{(f)} = 1 + p^f\mathbb{Z}_p$ de $\mathbb{Z}_p^\times$ e $\mathbb{U}_2^{[f]}$ como o subgrupo fechado de $\mathbb{Z}_2^\times$ gerado por $-1+2^f$.

Lema 1.1.1. *Temos que*

$$\mathbb{U}_p^{(1)} \simeq \begin{cases} \mathbb{Z}_p\,, & se\ p \neq 2\,, \\ \{\pm 1\} \times \mathbb{U}_2^{(2)}\,, & se\ p = 2 \end{cases}$$

é o subgrupo p-Sylow de $\mathbb{Z}_p^\times$. Além disto, $\mathbb{U}_2^{(2)} \simeq \mathbb{Z}_2$. Todo subgrupo fechado próprio de $\mathbb{U}_2^{(1)} = 1 + 2\mathbb{Z}_2$ é isomorfo a $\mathbb{U}_2^{(f)}$ ou $\{\pm 1\} \times \mathbb{U}_2^{(f)}$ para $f \geq 2$ ou a $\mathbb{U}_2^{[f']}$ para $2 \leq f' \leq \infty$ dependendo da projeção e da interseção deste com $\{\pm 1\}$.

Demonstração. Os isomorfismos para $\mathbb{U}_p^{(1)}$ e $\mathbb{U}_2^{(2)}$ são demonstrados em [Ser70, Prop. II.8]. Seja H um subgrupo fechado próprio de $\mathbb{U}_2^{(1)}$. Se a projeção de H em $\{\pm 1\}$ é trivial, então $H \leq \mathbb{U}_2^{(2)}$ e como $\log\colon \mathbb{U}_2^{(2)} \to 4\mathbb{Z}_2$ é um isomorfismo ([KKS00, Prop. 2.17.3]), temos que $H = \mathbb{U}_2^{(f)}$ para algum $f \geq 2$.

Se $\{\pm 1\}$ é um fator direto de H, então H é gerado por -1 e um gerador $1 + 2^f$ da projeção de H em $\mathbb{U}_2^{(2)}$, de onde segue que $H = \{\pm 1\} \times \mathbb{U}_2^{(f)}$. Por fim, se -1 pertence a projeção de H sobre $\{\pm 1\}$ mas este não é um fator direto de H, então H deve ser gerado por $-1 + 2^{f'}$, onde $1 - 2^{f'}$ gera a imagem da projeção de H em $\mathbb{U}_2^{(2)}$, isto é, $H = \mathbb{U}_2^{[f']}$. $\square$

Exemplo 1.1.2. Uma transformação afim de $\mathbb{Z}_p$ é uma função $f\colon \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}_p$ da forma $f(x) = ax + b$ para algum par de elementos a, b em $\mathbb{Z}_p$ com a invertível. Tais funções são bijetoras, pois $f^{-1}(x) = a^{-1}x - a^{-1}b$, e, portanto, formam um grupo sob a operação de composição de funções, chamado o *grupo de transformações afins* $\mathrm{Aff}(\mathbb{Z}_p)$. A decomposição $\mathbb{Z}_p \simeq \varprojlim \mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z}$ induz uma decomposição $\mathrm{Aff}(\mathbb{Z}_p) \simeq \varprojlim \mathrm{Aff}(\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z})$ dada pelo limite inverso das reduções de a e b módulo p^k, demonstrando que $\mathrm{Aff}(\mathbb{Z}_p)$ é sempre um grupo profinito.

Temos um isomorfismo $\varphi\colon \mathbb{Z}_p \rtimes \mathbb{Z}_p^\times \to \mathrm{Aff}(\mathbb{Z}_p)$ dado por $\varphi(b, a)(x) = ax + b$, onde $\mathbb{Z}_p^\times$ age sobre o grupo aditivo $\mathbb{Z}_p$ através da multiplicação de sua estrutura de anel. Como $1 + p\mathbb{Z}_p = \mathbb{U}_p^{(1)}$ é o subgrupo p-Sylow de $\mathbb{Z}_p^\times$, temos que $\mathbb{Z}_p \rtimes \mathbb{U}_p^{(1)}$ é o subgrupo p-Sylow de $\mathrm{Aff}(\mathbb{Z}_p)$. $\blacksquare$

O grupo G é *topologicamente finitamente gerado* se G possui um subgrupo abstrato finitamente gerado e denso. Dizemos que G é *topologicamente gerado* pelos elementos $x_1, \cdots, x_d$ se $G = \overline{\langle x_1, \cdots, x_d \rangle}$. Denotamos por $d(G)$ a menor cardinalidade de um conjunto de geradores topológicos para G *convergindo para* 1, isto é, com a propriedade de que todo subgrupo aberto $U \leq_o G$ contém quase todos os elementos deste conjunto. A cardinalidade $d(G)$ também é chamada de *posto* de G.

Proposição 1.1.3. *Para todo grupo profinito G, defina o* subgrupo de Frattini $\Phi(G)$ *como a interseção dos subgrupos próprios fechados maximais de G. Assim, vale que:*

(I) [RZ10, Prop. 2.8.2] *Se $G = \varprojlim G/U_i$ para $U_i \trianglelefteq_c G$, então $\Phi(G) = \varprojlim \Phi(G/U_i)$.*

(II) [RZ10, Cor. 2.8.5] *Se $H\Phi(G) = G$ para algum subgrupo fechado $H \leq_c G$, então $H = G$.*

(III) [RZ10, Lem. 2.8.6] *Se $d(G)$ é finito, então $d(G) = d(G/\Phi(G))$.*

(IV) [RZ10, Lem. 2.8.7] *Se G for pro-p, todo subgrupo maximal possui índice p, $\Phi(G) = \overline{G^p[G, G]}$ e o quociente $G/\Phi(G)$ é um $\mathbb{F}_p$-espaço vetorial. Assim, G é topologicamente finitamente gerado se, e somente se, $G/\Phi(G)$ possui dimensão finita sobre $\mathbb{F}_p$.*

Precisaremos também da propriedade Hopfiana:

Proposição 1.1.4 ([Ser97, Exer. 1, Sec. III.4.2]). *Sejam G um grupo profinito topologicamente finitamente gerado, e $\varphi\colon G \to G$ uma sobrejeção contínua. Então, φ é um isomorfismo.*

Sejam Γ um grupo abstrato e $\mathcal{C}$ uma classe de grupos finitos. O *completamento pro-$\mathcal{C}$* de Γ, denotado por $\widehat{\Gamma}_{\mathcal{C}}$, é o grupo profinito dado pelo limite inverso

$$\widehat{\Gamma}_{\mathcal{C}} = \varprojlim_{\Gamma/\Delta \in \mathcal{C}} \Gamma/\Delta$$

dos quocientes de Γ que pertencem a $\mathcal{C}$. Quando $\mathcal{C}$ consiste em todos os grupos finitos, denotamos $\widehat{\Gamma}_{\mathcal{C}}$ apenas por $\widehat{\Gamma}$ e o denominamos o *completamento profinito* de Γ, e quando $\mathcal{C}$ consiste em todos os p-grupos finitos, denotamos $\widehat{\Gamma}_{\mathcal{C}}$ por $\widehat{\Gamma}_p$ e o denominamos o *completamento pro-p* de Γ (que é sempre um grupo pro-p).

O núcleo do homomorfismo induzido $\iota\colon \Gamma \to \widehat{\Gamma}_{\mathcal{C}}$ é dado pela interseção dos subgrupos normais Δ cujo quociente Γ/Δ pertence à $\mathcal{C}$. Seja $\mathcal{X}$ uma classe de grupos profinitos. Dizemos que Γ é *residualmente $\mathcal{X}$* se os núcleos de todos os epimorfismos $\Gamma \to \Gamma/\Delta$ com $\Gamma/\Delta \in \mathcal{X}$ se intersectam trivialmente. Se $\mathcal{X}$ consiste de todos os p-grupos finitos, dizemos que Γ é *residualmente p*.

O seguinte resultado será importante no Capítulo 5 ao estabelecermos a validade da Conjectura de Atiyah para grupos de Dëmushkin. Assim, faremos a sua demonstração:

Lema 1.1.5 ([JZS19, Prop. 5.1]). *Sejam $\mathcal{X}$ uma classe grupos pro-p fechada para subgrupos e extensões, G um grupo pro-p topologicamente finitamente gerado e*

$$\cdots \leq_o G_n \leq_o \cdots \leq_o G_2 \leq_o G_1 \leq_o G_0 = G$$

uma sequência de subgrupos normais abertos de G tais que $\bigcap_{n=0}^{\infty} G_n = \{1\}$. Se, para cada $n \geq 1$, existe um subgrupo fechado $Q_n \leq_c G_n$ tal que Q_n é normal em G_{n-1} e $G_{n-1}/Q_n \in \mathcal{C}$, então G é residualmente $\mathcal{C}$.

Demonstração. Para todo $n \geq 1$, seja X um conjunto completo de representantes das classes laterais em G/G_{n-1} e defina $\tilde{Q}_n = \bigcap_{x \in X} xQ_nx^{-1}$. Note que o homomorfismo contínuo

$$\begin{aligned} G_{n-1}/\tilde{Q}_n &\to \prod_{x \in X} G_{n-1}/xQ_nx^{-1} \\ g\tilde{Q}_n &\mapsto \left(gxQ_nx^{-1}\right)_{x \in G/G_{n-1}} \end{aligned}$$

está bem definido e é injetivo. Como $\mathcal{X}$ é fechada para extensões e G/G_{n-1} é finito, o produto do lado direto está em $\mathcal{X}$. Assim, como $\mathcal{X}$ é fechada para subgrupos, podemos concluir também que $G_{n-1}/\tilde{Q}_n \in \mathcal{X}$.

Agora, para cada $n \geq 1$, tome $\Omega_n = \bigcap_{i=1}^{n} \tilde{Q}_i$. Temos que a sequência de subgrupos Ω_n satisfaz:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \Omega_n \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} \tilde{Q}_n \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} Q_n \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} G_{n-1} = \{1\}\,.$$

Desta forma, para mostrarmos que G é residualmente $\mathcal{X}$, é suficiente mostrarmos que $G/\Omega_n \in \mathcal{X}$ para todo $n \geq 1$.

Prosseguiremos por indução sobre n. Para $n = 1$, temos

$$G/\Omega_1 = G/\tilde{Q}_1 = G_0/\tilde{Q}_1\,.$$

Como sabemos que $G_{n-1}/\tilde{Q}_n \in \mathcal{X}$ para todo $n \geq 1$, o passo base está demonstrado. Suponha agora que $G/\Omega_i \in \mathcal{X}$ para todo $i < n$. A sequência exata curta

$$1 \to \Omega_{n-1}/\Omega_n \to G/\Omega_n \to G/\Omega_{n-1} \to 1$$

garante, pela hipótese de indução, que é suficiente mostrarmos que $\Omega_{n-1}/\Omega_n \in \mathcal{X}$, uma vez que $\mathcal{X}$ é fechada para extensões. Porém, $\mathcal{X}$ também é fechada para subgrupos, e, como $\Omega_n = \Omega_{n-1} \cap \tilde{Q}_n$, o grupo $\Omega_{n-1}/\Omega_n \simeq \Omega_{n-1}\tilde{Q}_n/\tilde{Q}_n$ é um subgrupo de $G_{n-1}/\tilde{Q}_n$. Podemos, então, concluir que $\Omega_{n-1}/\Omega_n \in \mathcal{X}$ como desejado. $\square$

Seja X um conjunto qualquer. Um grupo pro-p F é dito um grupo pro-p livre sobre o conjunto X se existe uma função $\iota\colon X \to F$ tal que V contém quase todos os elementos de $\iota(X)$ para todo subgrupo aberto V de F e tal que para toda função $f\colon X \to G$ de X em um grupo pro-p G com a propriedade de que todo subgrupo aberto U de G contém quase todos os elementos de $f(X)$ existe um único homomorfismo contínuo $\varphi\colon F \to G$ tal que $f = \varphi \circ \iota$. O grupo pro-p livre $F = F(X)$ sobre o conjunto X existe e é único a menos de único isomorfismo, e todo grupo pro-p G é um quociente de um grupo pro-p livre.

Dado um subconjunto $R \subseteq F(X)$, dizemos que $\langle X \mid R \rangle$ é uma *apresentação pro-p* para um grupo pro-p G se existe um isomorfismo entre G e $F(X)/N$ onde N é a interseção de todos os subgrupos normais fechados de $F(X)$ contendo R. Neste caso, dizemos que G é gerado por X sujeito às relações R, e utilizamos a notação $G \simeq \langle X \mid R \rangle$ ou

$$G \simeq \langle x_1, \cdots, x_n \mid r_1 = \cdots = r_m = 1 \rangle$$

se $X = \{x_1, \cdots, x_n\}$ e $R = \{r_1, \cdots, r_m\}$. Se $\langle X \mid R \rangle$ é uma apresentação abstrata para um grupo abstrato G, então, ao identificarmos R com um subconjunto do grupo pro-p livre $F(X)$, temos que $\langle X \mid R \rangle$ é uma apresentação *pro-p* para o completamento pro-p $\widehat{G}_p$.

Seja G um grupo pro-p e defina o *posto-de-subgrupos* de G por:

$$\mathrm{rk}(G) = \sup\{d(H) \mid H \leq_c G\}\,,$$

isto é, $\mathrm{rk}(G)$ é o supremo das cardinalidades dos conjuntos de geradores topológicos convergindo para 1 dos subgrupos fechados H de G. Se $\mathrm{rk}(G) < \infty$, dizemos que G possui *posto-de-subgrupos finito*. Um grupo pro-p G é dito *analítico p-ádico* se, e somente se, G possui posto-de-subgrupos finito [DdSMS03, Teo. 8.1].

Proposição 1.1.6 (Serre, *cf.* [Laz65, Teo. III.3.4.5] e [DdSMS03, Exer. 1 do Cap. 3])**.** *Os grupos pro-p analíticos p-ádicos formam uma classe fechada para extensões.*

1.2 G-espaços e G-módulos

Os grupos abelianos topológicos sobre os quais G age continuamente (à esquerda) por automorfismos compõem a categoria dos G-módulos. Há entretanto significativas diferenças entre as teorias dos G-módulos discretos e dos G-módulos profinitos, de tal forma que estes merecem tratamentos diferenciados. Em particular, os G-módulos discretos formam uma subcategoria $\mathfrak{Dgmod}(G)$ ideal para o desenvolvimento da *cohomologia* do grupo G, enquanto que os G-módulos profinitos $\mathfrak{Pgmod}(G)$ se mostram mais adequados para o desenvolvimento da *homologia* de G.

Seja X um espaço discreto ou profinito. Dizemos que G age continuamente (à esquerda) sobre o espaço X se existe uma função contínua $: G \times X \to X$ (denotada por $(g, x) \mapsto g \cdot x$) satisfazendo $1 \cdot x = x$ para todo $x \in X$e $g_1 \cdot (g_2 \cdot x) = (g_1 g_2) \cdot x$ para todos $x \in X$ e $g_1, g_2 \in G$. Se X possuir a estrutura adicional de grupo topológico abeliano, então dizemos que G age continuamente (à esquerda) sobre o grupo topológico abeliano X se a ação sobre o espaço se der por automorfismos de X. Se X for um espaço discreto ou profinito com uma ação contínua de G, dizemos que X é um G-espaço. A definição anterior presta-se naturalmente a uma definição análoga de ação contínua de G sobre X à direita.

Seja G um grupo profinito. Se G age continuamente sobre um espaço X, para um ponto $x \in X$ dizemos que o conjunto

$$O_x = \{g \cdot x \mid g \in G\}$$

é a *órbita* de x pela ação de G. Analogamente, dado um subconjunto $S \subseteq X$, podemos definir a órbita

$$O_S = \{g \cdot x \mid g \in G, \quad s \in S\}$$

de S pela ação de G. Para $x \in X$, definimos também o subgrupo fechado

$$G_x = \{g \in G \mid gx = x\}$$

chamado de *estabilizador* de x em G. No caso em que X é discreto, G_x também é um subgrupo aberto de G. Nesta seção, a principal referência é [RZ10].

Sejam g_1 e g_2 elementos de G. Dizemos que a ação de G sobre X é *fiel*, ou que G age fielmente sobre X, se para quaisquer g_1 e g_2 em G tais que $g_1 \neq g_2$ existe $x \in X$ tal que $g_1x \neq g_2x$; ou seja, se $G_X = \{1\}$. Dizemos que a ação de G sobre X é *livre*, ou que G *age livremente* sobre X, se para quaisquer $g_1, g_2 \in G$ tais que $g_1 \neq g_2$ tem-se que $g_1x \neq g_2x$ para todo $x \in X$; ou seja, se $G_x = \{1\}$ para todo $x \in X$. Dizemos que um subconjunto $R \subseteq X$ é G-invariante se $O_R \subseteq R$, isto é, $g \cdot r \in R$ para todo $r \in R$ e $g \in G$. Em outras palavras, se R é fechado para a ação de G. Neste caso, G também age continuamente sobre o subespaço R com a ação herdada de X.

Definimos o *espaço dos pontos de fixos* de X, denotado por X^G, como o conjunto G-invariante dado pelos elementos de X fixados por todo elemento de G:

$$X^G = \{x \in X \mid gx = x \quad \forall g \in G\}.$$

Como X^G é a interseção dos equalizadores entre a identidade Id_X e $g \cdot (-)\colon X \to X$ para $g \in G$, temos que X^G é sempre fechado e, portanto, é novamente um G-espaço. Se X possuir uma estrutura de grupo topológico abeliano, então X^G também é um subgrupo de X.

Um *G-módulo discreto* (respectivamente, um *G-módulo profinito*) é um grupo abeliano discreto (respectivamente, profinito) M dotado de uma ação contínua $G \times M \to M$ por automorfismos de M. Se M é um G-módulo discreto (respectivamente, profinito), então M também é um H-módulo discreto (respectivamente, profinito) para todo subgrupo fechado $H \leq_c G$. Quando formos explicitamente nos referir à estrutura de H-módulo em um G-módulo M, denotaremos este H-módulo por $\mathrm{Res}_H^G M$.

Se M é um G-módulo discreto, então o estabilizador G_m de cada elemento $m \in M$ é um subgrupo aberto de G, e esta propriedade caracteriza os G-módulos discretos. Se G é um grupo pro-p, qualquer G-módulo simples, discreto e p-aniquilado (isto é, todo elemento não trivial possui ordem p) é isomorfo a $\mathbb{F}_p$ com ação trivial.

Se M é um G-módulo profinito, então todo subgrupo aberto N de M contém um G-submódulo aberto. Dizemos que um subconjunto $\{x_i\}_{i \in I} \subseteq M$ gera M como G-módulo profinito se M é o menor subgrupo fechado G-invariante contendo $\{x_i\}_{i \in I}$.

Proposição 1.2.1 ([Bru66, Cor. 1.5]). *Sejam G um grupo pro-p e M um G-módulo pro-p. Então, $\{x_i\}_{i \in I}$ é um conjunto gerador de M como G-módulo se, e somente se,*

$\{x_i + (G-1)M\}_{i\in I}$ gera topologicamente o quociente M_G. Em particular, $\{x_i\}_{i\in I}$ é um conjunto gerador de M como G-módulo se, e somente se, $\{x_i + (G-1)M + pM\}_{i\in I}$ gera topologicamente o quociente $M_G/\Phi(M_G)$.

Seja M um G-módulo à esquerda discreto ou profinito e defina o G-módulo *dual*

$$M^\vee = \mathrm{Hom}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$$

como o grupo abeliano aditivo de todos os homomorfismos contínuos de M em $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Para todo elemento $\varphi \in M^\vee$, definimos uma ação à esquerda de G sobre φ como:

$$(g\varphi)(x) = \varphi(g^{-1}x)\,, \quad \forall x \in M\,.$$

Se $\psi\colon M \to N$ é um homomorfismo de G-módulos, então o homomorfismo induzido $\psi^\vee\colon N^\vee \to M^\vee$ através da pré-composição com ψ comuta com a ação sobre o dual assim definida. Na topologia compacto-aberto, $M^\vee$ é novamente um G-módulo, e se M for discreto e de torção (respectivamente, profinito) então $M^\vee$ é profinito (respectivamente, discreto e de torção). A dualidade de Pontryagin-van Kampen afirma a existência de um isomorfismo natural $M \simeq M^{\vee\vee}$.

Um anel profinito Λ é um anel associativo e unitário topológico isomorfo a um limite inverso $\varprojlim \Lambda_i$ de anéis finitos discretos Λ_i. Um Λ-módulo (à esquerda) profinito (respectivamente, discreto) M é um grupo abeliano profinito (respectivamente, discreto) dotado de uma ação contínua de Λ sobre M por endomorfismos tal que $1m = m$ para todo $m \in M$.

Todo grupo abeliano profinito e todo grupo abeliano discreto de torção possuem uma única estrutura de $\widehat{\mathbb{Z}}$-módulo. Todo grupo abeliano pro-p e todo grupo abeliano discreto p-primário possui uma única estrutura como $\mathbb{Z}_p$-módulo. Além disso, todo $\mathbb{Z}_p$-módulo discreto é necessariamente p-primário.

Sejam X um espaço profinito, M um Λ-módulo profinito e $\iota\colon X \to M$ uma função contínua. Dizemos que (M, ι) é um Λ-módulo profinito livre sobre o espaço X se para toda função contínua $\varphi\colon X \to N$ de X em um Λ-módulo profinito N existe um único homomorfismo $\overline{\varphi}\colon M \to N$ de Λ-módulos estendendo φ. Isto é, M é um Λ-módulo profinito livre sobre X se o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, dotted, "\exists!\,\overline{\varphi}"] & N \\ X \arrow[u, "\iota"] \arrow[ur, "\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

Se $(X, *)$ é um espaço profinito com um ponto distinguido $* \in X$ e $\iota\colon (X, *) \to (M, 0)$ é uma função contínua entre espaços com pontos distinguidos, dizemos que $(M, 0, \iota)$ é um Λ-módulo profinito livre sobre o espaço com ponto distinguido $(X, *)$ se M satisfaz uma propriedade universal análoga. Estes módulos existem, são únicos a menos de único isomorfismo e são denotados por $[[\Lambda X]]$ e $[[\Lambda(X, *)]]$.

Proposição 1.2.2 ([RZ10, Exer. 5.2.4])**.** *Sejam Λ um anel profinito e Y e Z subespaços fechados de $(X, *)$ tais que $* \in Y$ e $* \notin Z$.*

(a) As inclusões induzem isomorfismos:

$$[[\Lambda Z]] \to \overline{\langle Z \rangle} \subseteq [[\Lambda(X, *)]]\,,$$

$$[[\Lambda(Y, *)]] \to \overline{\langle Y \rangle} \subseteq [[\Lambda(X, *)]]\,,$$

$$[[\Lambda Z]] \to \overline{\langle Z \rangle} \subseteq [[\Lambda X]]\,;$$

(b) Os quocientes induzem isomorfismos:

$$[[\Lambda(X, *)]]/[[\Lambda(Y, *)]] \simeq [[\Lambda(X/Y, *)]]\,,$$

$$[[\Lambda X]]/[[\Lambda Z]] \simeq [[\Lambda(X/Z, Z)]]\,;$$

(c) Se $(Y, *) = \bigcap_{i \in I}(Y_i, *)$ e $Z = \bigcap_{j \in J} Z_j$ onde Y_i e Z_j são subconjuntos fechados de $(X, *)$ para todo i e j, então

$$[[\Lambda(Y, *)]] = \bigcap_{i \in I}[[\Lambda(Y_i, *)]] \text{ e } [[\Lambda Z]] = \bigcap_{j \in J}[[\Lambda Z_j]]\,.$$

Dizemos que um anel profinito Λ é uma Ω-álgebra para um anel profinito *comutativo* Ω se há um homomorfismo contínuo de anéis profinitos $\iota\colon \Omega \to \Lambda$ tal que a imagem de Ω está contida no centro de Λ. Se Λ é uma Ω-álgebra com homomorfismo $\iota\colon \Omega \to \Lambda$, A é um Λ-módulo profinito à direita, B é um Λ-módulo profinito à esquerda e M é um Ω-módulo, dizemos que uma função contínua

$$\varphi\colon A \times B \to M$$

é Λ-balanceada se para quaisquer $a, a' \in A$, $b, b' \in B$ e $\lambda \in \Lambda$ temos:

$$\varphi(a+a', b) = \varphi(a, b)+\varphi(a', b)\,, \quad \varphi(a, b+b') = \varphi(a, b)+\varphi(a, b')\,, \quad \varphi(a\lambda, b) = \varphi(a, \lambda b)\,.$$

Dizemos que um Ω-módulo profinito M é o *produto tensorial completo* de um Λ-módulo profinito à direta A com um Λ-módulo profinito à esquerda B se existe uma função Λ-

balanceada $A \times B \to M$ denotada por $(a, b) \mapsto a \widehat{\otimes} b$ tal que para todo Ω-módulo profinito N e função Λ-balanceada $\varphi \colon A \times B \to N$ existe um único homomorfismo de Ω-módulos $\hat{\varphi} \colon M \to N$ tal que $\hat{\varphi}(a \widehat{\otimes} b) = \varphi(a, b)$:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, dotted, "\exists!\,\hat{\varphi}"] & N \\ A \times B \arrow[u] \arrow[ur, "\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

A existência e unicidade de $M = A \widehat{\otimes}_\Lambda B$ seguem das mesmas propriedades para o produto tensorial usual por um processo limite. Algumas propriedades do produto tensorial completo são resumidas a seguir:

Proposição 1.2.3 ([RZ10, Prop. 5.5.3 e 5.5.4])**.** *Sejam Λ uma Ω-álgebra para algum anel profinito comutativo Ω e A e B dois Λ-módulos profinitos à direita e à esquerda respectivamente. Então:*

(a) Se
$$0 \to M_0 \to M_1 \to M_2 \to 0$$
é uma sequência exata curta de Λ-módulos à esquerda (respectivamente, à direita), então
$$A \widehat{\otimes}_\Lambda M_0 \to A \widehat{\otimes}_\Lambda M_1 \to A \widehat{\otimes}_\Lambda M_2 \to 0$$
$$(\textit{respectivamente, } M_0 \widehat{\otimes}_\Lambda B \to M_1 \widehat{\otimes}_\Lambda B \to M_2 \widehat{\otimes}_\Lambda B \to 0)$$
é uma sequência exata de Ω-módulos. Em outras palavras, os funtores $A \widehat{\otimes}_\Lambda -$ e $- \widehat{\otimes}_\Lambda B$ são covariantes e exatos à direita.

(b) Se A' e B' também são Λ-módulos à direita e à esquerda respectivamente, temos:
$$(A \times A') \widehat{\otimes}_\Lambda B \simeq (A \widehat{\otimes}_\Lambda B) \times (A' \widehat{\otimes}_\Lambda B)\,, \quad A \widehat{\otimes}_\Lambda (B \times B') \simeq (A \widehat{\otimes}_\Lambda B) \times (A \widehat{\otimes}_\Lambda B')\,.$$
Assim, os funtores $A \widehat{\otimes}_\Lambda -$ e $- \widehat{\otimes}_\Lambda B$ comutam com produtos diretos finitos.

(c) Vale que $A \widehat{\otimes}_\Lambda \Lambda \simeq A$ e $\Lambda \widehat{\otimes}_\Lambda B \simeq B$.

(d) Se A ou B forem finitamente gerados como Λ-módulos profinitos, então
$$A \widehat{\otimes}_\Lambda B \simeq A \otimes_\Lambda B\,,$$
onde $A \otimes_\Lambda B$ denota o produto tensorial abstrato sobre Λ.

(e) Se Λ é comutativo, então $A \widehat{\otimes}_\Lambda B = B \widehat{\otimes}_\Lambda A$ com a devida identificação dos Λ-módulos à esquerda e à direita.

Suponha que exista uma ação contínua à esquerda de Λ sobre A por endomorfismos contínuos, e que essa ação seja compatível com a ação à direita no seguinte sentido: para quaisquer λ e λ' em Λ, $\omega \in \Omega$ e $a \in A$, vale que

$$\lambda(a\lambda') = (\lambda a)\lambda' \,, \quad \text{e} \quad \omega a = a\omega \,.$$

Então:

(f) O Ω-módulo profinito $A \widehat{\otimes}_\Lambda B$ é um Λ-módulo profinito à esquerda com ação dada por

$$\lambda(a \,\widehat{\otimes}\, b) = (\lambda a) \,\widehat{\otimes}\, b \,, \quad \forall a \in A \,, b \in B \text{ e } \lambda \in \Lambda \,.$$

(g) O Ω-módulo discreto $\mathrm{Hom}_\Lambda(A, C)$ é um Λ-módulo discreto à esquerda com ação dada por

$$(\lambda\varphi)(a) = \varphi(a\lambda) \,, \quad \forall \varphi \in \mathrm{Hom}_\Lambda(A, C) \text{ e } \lambda \in \Lambda \,.$$

(h) Vale a fórmula de adjunção: *o homomorfismo*

$$\Psi \colon \mathrm{Hom}_\Lambda(B, \mathrm{Hom}_\Lambda(A, C)) \to \mathrm{Hom}_\Lambda(A \,\widehat{\otimes}_\Lambda\, B, C)$$

dado por

$$\Psi(\varphi)(a \,\widehat{\otimes}\, b) = \varphi(b)(a)$$

para todo $a \in A$, $b \in B$ e $\varphi \in \mathrm{Hom}_\Lambda(B, \mathrm{Hom}_\Lambda(A, C))$ é um isomorfismo de Ω-módulos discretos.

Seja Λ um anel profinito comutativo e defina a *álgebra de grupo completa* $[[\Lambda G]]$ como o limite inverso

$$[[\Lambda G]] = \varprojlim_{U \trianglelefteq_o G} [\Lambda(G/U)]$$

das álgebras de grupo $[\Lambda(G/U)]$ onde U percorre os subgrupos normais abertos de G. Definimos a multiplicação em $[[\Lambda G]]$ como a única extensão contínua da multiplicação $G \times G \to G \to [[\Lambda G]]$.

Proposição 1.2.4 ([RZ10, Prop. 5.3.6])**.** *Seja G um grupo profinito e M um G-módulo discreto de torção ou um G-módulo profinito. Então:*

(a) Existe uma única estrutura de $[[\widehat{\mathbb{Z}}G]]$-módulo sobre M compatível com a inclusão $G \to [[\widehat{\mathbb{Z}}G]]$.

(b) Se M for um G-módulo discreto p-aniquilado ou um G-módulo pro-p, existe uma única estrutura de $[[\mathbb{Z}_pG]]$-módulo sobre M compatível com a inclusão $G \to [[\mathbb{Z}_pG]]$.

(c) Temos

$$[[\mathbb{Z}_pG]]/p[[\mathbb{Z}_pG]] \simeq [[\mathbb{F}_pG]]\,,$$

e qualquer G-módulo discreto ou profinito que seja p-aniquilado possui uma única estrutura de $[[\mathbb{F}_pG]]$-módulo compatível com a inclusão $G \to [[\mathbb{F}_pG]]$.

Sejam H um subgrupo fechado de G e M um H-módulo discreto à esquerda. Definimos o *módulo coinduzido* $\operatorname{Coind}_H^G(M)$ como o grupo abeliano discreto de H-homomorfismos contínuos

$$\operatorname{Coind}_H^G(M) = \{f \in C^1(G, M) \mid f(hg) = hf(g) \text{ para todo } g \in G\,, h \in H\}$$

dotado de uma ação contínua à esquerda de G dada por

$$(gf)(g') = f(g'g)\,.$$

Se M é um H-módulo profinito, temos um *módulo induzido*

$$\operatorname{Ind}_H^G M = [[\widehat{\mathbb{Z}}G]]\,\widehat{\otimes}_{[[\widehat{\mathbb{Z}}H]]}\, M$$

onde a ação de G é dada pela multiplicação à esquerda no fator $[[\widehat{\mathbb{Z}}G]]$.

Proposição 1.2.5. *Para todo $[[\mathbb{F}_pG]]$-módulo M e todo subgrupo fechado $H \leq_c G$, temos um G-isomorfismo natural:*

$$\operatorname{Ind}_H^G M \simeq M\,\widehat{\otimes}_{\mathbb{F}_p}\,[[\mathbb{F}_p(G/H)]] \simeq [[\mathbb{F}_p(H\backslash G)]]\,\widehat{\otimes}_{\mathbb{F}_p}\, M\,.$$

Em particular, $[[\mathbb{F}_p(G/H)]] \simeq [[\mathbb{F}_p(H\backslash G)]]^\star$ é o módulo induzido $\operatorname{Ind}_H^G \mathbb{F}_p$. Além disso, se H é aberto em G, então $\operatorname{Ind}_H^G M$ possui uma filtração de $[[\mathbb{F}_pG]]$-submódulos

$$0 = M_0 < M_1 < \cdots < M_{k-1} < M_k = \operatorname{Ind}_H^G M$$

tal que $k = [G\colon H]$ e cada quociente M_i/M_{i-1} é isomorfo a M.

1.3 Cohomologia em $\mathfrak{Dgmod}(G)$

Seja M um G-módulo discreto. O *grupo das n-cocadeias contínuas* de G em M é o grupo abeliano aditivo $C^n(G, M)$ de todas as funções contínuas $f\colon G^n \to M$. Definimos o *operador de cobordo* $d^n\colon C^n(G,M)\to C^{n+1}(G,M)$ através da fórmula:

$$(d^n f)(g_1,\cdots,g_{n+1}) = g_1 f(g_2,\cdots,g_{n+1}) + \sum_{i=1}^{n}(-1)^i f(g_1,\cdots,g_i g_{i+1},\cdots,g_{n+1}) \\ + (-1)^{n+1} f(g_1,\cdots,g_n)\,.$$

Definimos o grupo dos n-*cociclos* $Z^n(G,M)$ como o seu núcleo

$$Z^n(G,M) = \mathrm{Ker}(d^n) = \{f\in C^n(G,M) \mid df = 0\}$$

e o grupo dos n-*cobordos* $B^n(G,M)$ como a imagem do operador anterior

$$B^n(G,M) = \mathrm{Im}(d^{n-1}) = \{f\in C^n(G,M) \mid \text{existe } h\in C^{n-1}(G,M) \text{ tal que } f = dh\}\,.$$

Vamos convencionar que $C^0(G,M)\simeq M$ é o espaço das funções constantes, que $(d^0 m)(g) = gm - m$ para todo $g\in G$ e $m\in M$ e que $C^n(G,M)=0$ (e portanto $d^n = 0$) para $n<0$. Temos que $d^{n+1}\circ d^n = 0$ para todo $n\in\mathbb{N}$. O n-ésimo grupo de cohomologia é então dado por

$$H^n(G,M) = Z^n(G,M)/B^n(G,M)\,.$$

Temos $H^0(G,M)\simeq M^G$, e, se a ação de G sobre M for trivial, temos $H^1(G,M)\simeq \mathrm{Hom}(G,M)$. Se G for um grupo pro-p, denotaremos os grupos $H^n(G,\mathbb{F}_p)$ simplesmente por $H^n(G)$.

Se $\varphi\colon G\to H$ é um homomorfismo de grupos profinitos, então a pré-composição com φ induz homomorfismos nos grupos de cohomologia

$$H^n(\varphi)\colon H^n(H,M)\to H^n(G,M)\,.$$

Um fenômeno análogo ocorre se há um homomorfismo $\psi\colon M\to N$ de G-módulos e realizamos a composição $C^n(G,\psi)$ com ψ, de forma que também obtemos homomorfismos

$$H^n(\psi)\colon H^n(G,M)\to H^n(G,N)$$

nos grupos de cohomologia.

Se M é um G-módulo discreto, então

$$H^n(G,M) = \varinjlim_{U\trianglelefteq_o G} H^n(G/U, M^U)$$

onde U percorre os subgrupos normais abertos de G. Para todo G-módulo discreto M, os grupos $H^n(G,M)$ são grupos de torção. A inclusão $\iota\colon H \to G$ induz homomorfismos

$$\operatorname{res}^G_H\colon H^n(G,M) \to H^n(H,M)$$

nos grupos de cohomologia dadas pela restrição das n-cocadeias a H:

$$(\operatorname{res}^G_H x)(h_1,\cdots,h_n) = f(h_1,\cdots,h_n) \text{ se } f \in C^n(G,M) \text{ representa } x \in H^n(G,M)\,.$$

Este homomorfismo é chamado de *restrição* e sua imagem independe da escolha de representante f da classe $x \in H^n(G,M)$.

Sejam M um G-módulo discreto e N um subgrupo *normal* fechado de G. A ação contínua de G sobre o G-módulo discreto M^N se fatora através de uma ação contínua de G/N e portanto estão definidos os grupos de cohomologia $H^n(G/N, M^N)$. A composição dos homomorfismos induzidos pela projeção $G \to G/N$ e pela inclusão $M^N \to M$ definem homomorfismos

$$\operatorname{inf}^G_{G/N}\colon H^n(G/N,M^N) \to H^n(G,M)$$

chamados de *inflações*. Sua ação em um elemento $x \in H^n(G/N,M^N)$ é dada por

$$\begin{aligned}(\operatorname{inf}^G_{G/N} x)(g_1,\cdots,g_n) = f(g_1N,\cdots,g_nN) \text{ se } f \in C^n(G/N,M^N)\\ \text{representa } x \in H^n(G,M)\,.\end{aligned}$$

Existe um homomorfismo de grupos abelianos $\operatorname{tr}\colon H^1(N,M)^G \to H^2(G/N,M^N)$ chamado *transgressão* tal que obtemos uma sequência exata de grupos abelianos:

$$\begin{aligned}0 \to H^1(G/N,M^N) \overset{\operatorname{inf}^G_{G/N}}{\to} H^1(G,M) \overset{\operatorname{res}^G_N}{\to} H^1(N,M)^{G/N}\\ \overset{\operatorname{tr}}{\to} H^2(G/N,M^N) \overset{\operatorname{inf}^G_{G/N}}{\to} H^2(G,M)\,.\end{aligned}$$

Para toda sequência exata curta

$$0 \to M' \overset{\iota}{\to} M \overset{\pi}{\to} M'' \to 0$$

de G-módulos discretos existem homomorfismos canônicos

$$\delta^n\colon H^n(G,M'') \to H^{n+1}(G,M) \quad (n \geq 0)$$

chamados de *homomorfismos conectores* tais que a sequência longa

$$0 \to H^0(G,M') \overset{H^0(\iota)}{\to} H^0(G,M) \overset{H^0(\pi)}{\to} H^0(G,M'') \overset{\delta^0}{\to} H^1(G,M') \overset{H^1(\iota)}{\to} \cdots$$

é uma sequência exata natural. Em outras palavras, $H^*(G,-)$ é o funtor derivado à direita do funtor aditivo covariante exato à esquerda $M \mapsto M^G$ em $\mathfrak{Dgmod}(G)$. Logo, $H^*(G,-)$ é um funtor cohomológico covariante universal.

Temos um homomorfismo canônico de H-módulos à esquerda $\operatorname{Coind}_H^G(M) \to M$ dado por $f \mapsto f(1)$. Este homomorfismo é compatível com a inclusão $H \to G$, de forma que ela induz um homomorfismo nos grupos de cohomologia

$$H^n(G, \operatorname{Coind}_H^G(M)) \to H^n(H, M)\,.$$

Em todas as dimensões n, o homomorfismo

$$H^n(G, \operatorname{Coind}_H^G(M)) \to H^n(H, M)$$

é um isomorfismo natural em M, chamado de *isomorfismo de Faddeev-Eckmann-Shapiro*.

Se U é um subgrupo *aberto* de G e M é um G-módulo, temos um homomorfismo de G módulos $\varphi\colon \operatorname{Coind}_U^G(M) \to M$ natural em M dado da seguinte forma: fixando um conjunto transversal finito $\{g_i\}$ de U em G, definimos

$$\varphi(f) = \sum_{g_i} g_i^{-1} f(g_i)\,.$$

A composição

$$H^n(U, M) \overset{\text{Shapiro}^{-1}}{\to} H^n(G, \operatorname{Coind}_U^G M) \overset{H^n(\varphi)}{\to} H^n(G, M)$$

é o homomorfismo que chamamos de correstrição $\operatorname{cor}_U^G\colon H^n(U, M) \to H^n(G, M)$.

Proposição 1.3.1 ([Ser97, Exer. 1 da Sec. I.2.6]). *Seja Γ um grupo discreto, e seja $f\colon \Gamma \to G$ um homomorfismo injetivo de Γ em um grupo profinito G, cuja imagem é densa em G. Então, para todo G-módulo discreto finito M e todo $n \in \mathbb{N}$, são equivalentes:*

A(n) *A aplicação induzida $H^q(G, M) \to H^q(\Gamma, M)$ é bijetiva para $q \leq n$ e injetiva para $q = n + 1$.*

B(n) *A aplicação induzida $H^q(G, M) \to H^q(\Gamma, M)$ é sobrejetiva para todo $q \leq n$.*

C(n) *Para todo $x \in H^q(\Gamma, M)$ com $1 \leq q \leq n$, existe um G-módulo discreto finito M' contendo M tal que a imagem de x em $H^q(\Gamma, M) \to H^q(\Gamma, M')$ é nula.*

D(n) *Para todo $x \in H^q(\Gamma, M)$ com $1 \leq q \leq n$, existe um subgrupo Γ_0 de Γ, imagem inversa de um subgrupo aberto de G, tal que a imagem de x em $H^q(\Gamma, M) \to H^q(\Gamma_0, M)$ é nula.*

Além disso, A(0), B(0), C(0) e D(0) são sempre verdadeiras. Os grupos de cohomologia $H^q(\Gamma, M)$ denotam a cohomologia abstrata *do grupo abstrato de* Γ.

Dizemos que a *p-dimensão cohomológica* de G é o menor inteiro não-negativo $\mathrm{cd}_p(G)$ tal que a componente p-primária $H^n(G,M)(p)$ de $H^n(G,M)$ é nula para todo $n > \mathrm{cd}_p(G)$ e G-módulo discreto de torção M. Se tal inteiro não existe, postulamos que $\mathrm{cd}_p(G) = \infty$. A *dimensão cohomológica* de G é o supremo das p-dimensões cohomológicas sobre todos os primos p:

$$\mathrm{cd}(G) = \sup_{p \text{ primo}} \mathrm{cd}_p(G)\,.$$

Tem-se $\mathrm{cd}_p(G) \le k$ se, e somente se,, para todo G-módulo discreto simples p-aniquilado M, vale $H^{k+1}(G,M) = 0$. Um grupo pro-p G satisfaz $\mathrm{cd}(G) \le k$ se, e somente se, $H^{k+1}(G,\mathbb{F}_p) = H^{k+1}(G) = 0$. Um grupo pro-$p$ G é pro-p livre se, e somente se, $\mathrm{cd}(G) \le 1$.

A *p-dimensão cohomológica estrita* de G é o menor inteiro não negativo $\mathrm{scd}_p(G)$ tal que a componente p-primária $H^n(G,M)(p)$ é nula para todo $n > \mathrm{scd}_p(G)$ e G-módulo discreto *qualquer* M. Se tal inteiro não existe, definimos $\mathrm{scd}_p(G) = \infty$ e definimos a *dimensão cohomológica estrita* de G como o supremo

$$\mathrm{scd}(G) = \sup_{p \text{ primo}} \mathrm{scd}_p(G)\,.$$

Para todo grupo profinito G e primo p, tem-se:

$$\mathrm{cd}_p(G) \le \mathrm{scd}_p(G) \le \mathrm{cd}_p(G) + 1\,.$$

Se G é um grupo pro-p e $d(G)$ é a cardinalidade de um conjunto minimal de geradores de G convergindo para 1, vale a fórmula

$$d(G) = \dim_{\mathbb{F}_p} H^1(G)\,.$$

O número minimal de relações em uma apresentação pro-p minimal de G é $\dim_{\mathbb{F}_p} H^2(G)$.

Seja G um grupo pro-p com $\mathrm{cd}(G) < \infty$. Suponha que os grupos $H^n(G,\mathbb{F}_p) = H^n(G)$ sejam finitos para todo $n \in \mathbb{Z}$, e defina a *característica de Euler-Poincaré* de G como a soma alternada:

$$\chi(G) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dim_{\mathbb{F}_p} H^n(G)\,.$$

Proposição 1.3.2 ([Ser97, Exer. 1 da Sec. I.4])**.** *Se U é um subgrupo aberto de um grupo pro-p G tais que os grupos $H^n(G)$ são finitos para todo $n \in \mathbb{Z}$, então os grupos de cohomologia*

$H^n(U)$ também são finitos para todo $n \in \mathbb{Z}$ e vale que

$$\chi(U) = [G\colon U]\chi(G)\,.$$

Proposição 1.3.3 (Fórmula do posto para grupos pro-p livres [Ser97, Ex. 4 da Sec. I.4])**.** *Seja $F = F(n)$ o grupo pro-p livre sobre um conjunto de n elementos. Temos que $n = d(F) = 1 - \chi(F)$, e para todo subgrupo aberto $U \leq_o F$, temos que U é também é um grupo pro-p livre topologicamente finitamente gerado e seu número minimal de geradores satisfaz*

$$d(U) - 1 = [F\colon U](d(F) - 1)\,.$$

Corolário 1.3.4 (Desigualdade do posto para grupos pro-p)**.** *Seja G um grupo pro-p topologicamente finitamente gerado. Então, todo subgrupo aberto U de G também é topologicamente finitamente gerado e seu número minimal de geradores satisfaz a desigualdade*

$$d(U) - 1 \leq [G\colon U](d(G) - 1)\,.$$

Reciprocamente, um grupo pro-G topologicamente finitamente gerado é grupo pro-p livre se, e somente se, tem-se

$$d(U) - 1 = [G\colon U](d(G) - 1)$$

para todo subgrupo aberto U de G ([Ser97, Exer. I.4.2.4]).

Uma função $\mathbb{Z}$-bilinear $\varphi\colon M_1 \times M_2 \to M_3$ entre G-módulos discretos é dita um *G-pareamento* se $\varphi(gm_1, gm_2) = g\varphi(m_1, m_2)$ para qualquer $g \in G$, $m_1 \in M_1$ e $m_2 \in M_2$. Assim, o mapa canônico $M_1 \times M_2 \to M_1 \otimes_{\mathbb{Z}} M_2$ é um G-pareamento, e qualquer G-pareamento $\varphi\colon M_1 \times M_2 \to M_3$ induz um único homomorfismo $\tilde{\varphi}\colon M_1 \otimes_{\mathbb{Z}} M_2 \to M_3$ de G-módulos. Existem únicas aplicações bilineares

$$\cup\colon H^i(G, M_1) \times H^j(G, M_2) \to H^{i+j}(G, M_3)$$

que estendem φ em dimensão zero, chamadas *produtos cup*. Estas aplicações são funtoriais em M_1, M_2 e M_3 e compatíveis com os homomorfismos conectores δ.

Se R é um anel discreto sobre o qual G age trivialmente, então a multiplicação $R \times R \to R$ é um G-pareamento e induz uma multiplicação graduada nos grupos de cohomologia

$$\cup\colon H^i(G, R) \times H^j(G, R) \to H^{i+j}(G, R)\,.$$

Esta multiplicação é realizada simplesmente pela multiplicação de classes: se $f \in C^i(G, R)$ representa $x \in H^i(G, R)$ e $h \in C^j(G, R)$ representa $y \in H^j(G, R)$, então $x \cup y \in$

$H^{i+j}(G, R)$ é representada pela função

$$(f \cdot h)(g_1, \cdots, g_{i+j}) = f(g_1, \cdots, g_i)h(g_{i+1}, \cdots, g_{i+j}) .$$

1.3.1 Grupos de dualidade de Poincaré

Definição 1.3.5. Seja G um grupo pro-p. Dizemos que G satisfaz a dualidade de Poincaré em dimensão n se as seguintes condições **P1**-**P3** são satisfeitas:

P1 $H^i(G) = H^i(G, \mathbb{F}_p)$ é finito para todo $i \in \mathbb{N}$;

P2 $\dim_{\mathbb{F}_p} H^n(G) = 1$;

P3 O produto cup

$$\cup\colon H^i(G) \times H^{n-i}(G) \to H^n(G)\,, \quad i \geq 0 \text{ qualquer}$$

é uma forma bilinear não degenerada, isto é, $y \mapsto (x \mapsto x \cup y)$ é um isomorfismo para todo $y \in H^i(G)$.

Neste caso, G é dito um grupo de dualidade de Poincaré (em dimensão n). Também será útil considerarmos as condições **P1** e **P3** restritas apenas para dimensões menores do que ou iguais a n:

P1' $H^i(G)$ é finito para todo $1 \leq i \leq n$;

P2' $\dim_{\mathbb{F}_p} H^n(G) = 1$;

P3' Os produtos cup

$$\cup\colon H^i(G) \times H^{n-i}(G) \to H^n(G)\,, \quad 1 \leq i \leq n$$

são formas bilineares não degeneradas.

Proposição 1.3.6 ([Ser97, Prop. I.32])**.** *Seja G um grupo pro-p satisfazendo em dimensão n as condições **P1'-P3'** dadas na Definição 1.3.5. Se G é infinito, então G satisfaz a dualidade de Poincaré em dimensão n.*

Exemplo 1.3.7 ([Ser97, Exer. 1 da Sec. I.4.5])**.** Se G é um grupo pro-p comutativo, então é equivalente:

(a) $\mathrm{cd}(G) = n$;

(b) G é isomorfo a $\mathbb{Z}_p^n$;

(c) G é um grupo de dualidade de Poincaré em dimensão n.

Exemplo 1.3.8 ([Laz65, Teo. V.2.5.8])**.** Todo grupo pro-p analítico p-ádico de dimensão n livre-de-torção é também um grupo de dualidade de Poincaré de dimensão n. Em particular, $\mathbb{Z}_p^n$ é um grupo de dualidade de Poincaré em dimensão n para todo $n \in \mathbb{N}$. ■

Dizemos que um G-módulo discreto e de torção I é o *módulo dualizante* de G em dimensão n se para todo G-módulo discreto finito M existe um isomorfismo natural em M de grupos abelianos:

$$H^n(G,M)^\vee = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(H^n(G,M), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \simeq \mathrm{Hom}_G(M,I)\,.$$

Proposição 1.3.9 ([Ser97, Prop. I.30 e seu Cor.])**.** *Seja G um grupo pro-p de dualidade de Poincaré em dimensão n. Então, o módulo dualizante I de G em dimensão n está definido e temos:*

(a) Se M é um G-módulo discreto p-aniquilado, então $H^i(G,M)$ é finito para todo $i \in \mathbb{N}$ e o produto cup

$$\cup\colon H^i(G,M) \times H^i(G,M^*) \to H^n(G) \simeq \mathbb{F}_p$$

induzido pelo G pareamento de M com o seu dual $M^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_p}(M,\mathbb{F}_p)$ é uma forma bilinear não degenerada (a ação de G sobre M^* é dada por $(gf)(m) = f(g^{-1}m)$).

(b) Todo subgrupo aberto U de G é um grupo de dualidade de Poincaré em dimensão n, e a correstrição $\mathrm{cor}_U^G\colon H^n(U) \to H^n(G)$ é um isomorfismo em dimensão n.

(c) I é isomorfo a $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$ como grupo abeliano.

(d) O homomorfismo canônico $i\colon H^n(G,I) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ é um isomorfismo entre $H^n(G,I)$ e um subgrupo isomorfo a $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$.

(e) Para todo G-módulo discreto finito p-primário M, defina $\widetilde{M} = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M,I)$ com a ação de G dada por $(gf)(m) = gf(g^{-1}m)$. Então, para todo $i \in \mathbb{N}$, o produto cup

$$\cup\colon H^i(G,M) \times H^{n-i}(G,\widetilde{M}) \to H^n(G,I) \simeq \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$$

induzido pelo G-pareamento $(m,f) \mapsto f(m)$ é uma dualidade entre os dois grupos finitos $H^i(G,M)$ e $H^{n-i}(G,\widetilde{M})$, isto é, as aplicações

$$H^i(G,M) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(H^{n-i}(G,\widetilde{M}), \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p) \simeq H^{n-i}(G,\widetilde{M})^\vee$$

e

$$H^{n-i}(G, \widetilde{M}) \to \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(H^i(G, M), \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p) \simeq H^i(G, M)^{\vee}$$

são isomorfismos.

Uma vez que $\operatorname{Aut}_G(I)$ é isomorfo ao grupo das unidades p-ádicas $\mathbb{Z}_p^{\times}$, a ação de G sobre I induz um homomorfismo canônico

$$\chi\colon G \to \mathbb{Z}_p^{\times}$$

denominado *invariante ciclotômico* de G, cuja imagem está contida no subgrupo U_p^1 das unidades principais (congruentes à $1 \pmod p$).

Corolário 1.3.10 ([Ser97, Prop. I.31])**.** *Seja G um grupo pro-p de dualidade de Poincaré em dimensão n, e seja $\chi\colon G \to \mathbb{Z}_p$ seu invariante ciclotômico. Para que scd(G) seja igual à $n+1$ é necessário e suficiente que $\operatorname{Im}(\chi)$ seja finita.*

Exemplo 1.3.11 ([Ser97, Exer. 5 da Sec. I.4.5])**.** Se H é um subgrupo fechado próprio de um grupo G de dualidade de Poincaré em dimensão n, então a restrição $\operatorname{res}_H^G\colon H^n(G) \to H^n(H)$ é nula em dimensão n. Além disso, se $[G\colon H] = \infty$, isto é, se H não for aberto em G, temos que $\operatorname{cd}(H) \leq n-1$. ■

1.4 Homologia em $\mathfrak{Pgmod}(G)$

Sejam G um grupo profinito e M um G-módulo profinito. Definimos o n-ésimo grupo de homologia de G com coeficientes em M como n-ésimo funtor derivado à esquerda

$$H_n(G, M) = \operatorname{Tor}_n^{[[\widehat{\mathbb{Z}}G]]}(\widehat{\mathbb{Z}}, M)$$

do produto tensorial completo $M \mapsto \widehat{\mathbb{Z}} \widehat{\otimes}_{[[\widehat{\mathbb{Z}}G]]} M$. Assim, o funtor $H_n(G, -)\colon \mathfrak{Pgmod}(G) \to$ pro-$\mathfrak{ab}$ é um funtor homológico covariante, coapagável e universal [RZ10, Prop. 6.1.9]. Temos

$$H_0(G, M) \simeq \widehat{\mathbb{Z}} \,\widehat{\otimes}_{[[\widehat{\mathbb{Z}}G]]}\, M \simeq M_G$$

através da função $\widehat{\mathbb{Z}}$-balanceada $(\lambda, m) \mapsto \lambda m \in M_G$.

Para todo subgrupo fechado H de G e todo H-módulo profinito M temos um homomorfismo canônico de H-módulos à esquerda $\iota\colon M \to \operatorname{Ind}_H^G M$ dado por $m \mapsto 1 \,\widehat{\otimes}\, m$. Este homomorfismo composto com a troca de tensores completos induz o isomorfismo de Shapiro na homologia: em todas as dimensões n, o homomorfismo

$$H_n(H, M) \to H_n(G, \operatorname{Ind}_H^G(M))$$

é um isomorfismo natural em M.

No Capítulo 5, utilizaremos a construção da soma direta profinita de módulos profinitos para interpretarmos homologicamente a desigualdade de Hanna Neumann. Esta construção é dada através de feixes de módulos profinitos e de seus morfismos, como definido a seguir.

Sejam X um espaço profinito e Λ um anel profinito. Um *feixe* de Λ-módulos profinitos à esquerda sobre X é um espaço profinito $\mathcal{M}$, chamado *espaço base*, dotado de uma sobrejeção contínua $\pi\colon \mathcal{M} \to X$ com as seguintes propriedades:

(a) Para todo $x \in X$, a fibra $\mathcal{M}(t) = \pi^{-1}(x)$ é um Λ-módulo profinito como subespaço de $\mathcal{M}$.

(b) Definindo
$$\mathcal{M}^2 = \{(m_1, m_2) \in \mathcal{M} \times \mathcal{M} \mid \pi(m_1) = \pi(m_2)\},$$
as funções $\mu_{\mathcal{M}}\colon \mathcal{M}^2 \to \mathcal{M}$ e $\rho_{\mathcal{M}}\colon \Lambda \times \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ dadas por $\mu_{\mathcal{G}}(m_1, m_2) = m_1 - m_2$ e $\rho_{\mathcal{M}}(\lambda, m) = \lambda m$ são contínuas.

Definimos um feixe de Λ-módulos profinitos à direita sobre X de forma análoga.

Se $\alpha'\colon X \to X'$ é uma função contínua entre dois espaços profinitos e $\mathcal{M}$ e $\mathcal{M}'$ são feixes de Λ-módulos sobre X e X', respectivamente, um morfismo de feixes é um par (α, α') onde $\alpha\colon \mathcal{M} \to \mathcal{M}'$ é uma função contínua tal que o diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathcal{M} \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\pi"] & \mathcal{M}' \arrow[d, "\pi'"'] \\ X \arrow[r, "\alpha'"'] & X' \end{tikzcd}$$

comuta e a restrição de $\alpha_{|\mathcal{M}(x)}\colon \mathcal{M}(x) \to \mathcal{M}(\alpha'(x))$ é um homomorfismo de Λ-módulos. Em particular, se $X = X'$ e $\alpha' = \mathrm{Id}_X$, um morfismo de feixes de Λ-módulos sobre X é uma função contínua de espaços base que induz homomorfismos nas fibras.

Se $X' = \{*\}$ é um espaço discreto de um só elemento, então todo Λ-módulo profinito M pode ser visto como um feixe sobre X'. Desta forma, também está definido um morfismo $\alpha\colon \mathcal{M} \to M$ de um feixe de Λ-módulos profinitos $\mathcal{M}$ sobre um espaço profinito X em um Λ-módulo profinito M. A aplicação α é nada menos que uma função contínua cujas restrições às fibras são homomorfismos.

Sejam X um espaço profinito e $\mathcal{M}$ um feixe de Λ-módulos profinitos à esquerda sobre X. Dizemos que $M \in \mathfrak{Pmod}^{\text{esq}}(\Lambda)$ é uma *soma direta profinita* do feixe $\mathcal{M}$ se existe um morfismo $\iota\colon \mathcal{M} \to M$ com a seguinte propriedade universal: para qualquer morfismo $\varphi\colon \mathcal{M} \to M'$ de $\mathcal{M}$ em um Λ-módulo profinito M' existe um único homomorfismo de

Λ-módulos $\tilde{\varphi}\colon M \to M'$ tal que $\varphi = \tilde{\varphi} \circ \iota$.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{M} \arrow[r, "\iota"] \arrow[dr, "\varphi"'] & M \arrow[d, dotted, "\tilde{\varphi}"] \\ & M' \end{tikzcd}$$

Temos que M sempre existe e está definido a menos de um isomorfismo único. A soma direta profinita é denotada por

$$M \simeq \coprod_{x \in X} \mathcal{M}(x)\,.$$

Lema 1.4.1 ([Mel90, Lem. 3.3])**.** *Seja $\mathcal{M}$ um feixe de $[[\Lambda G]]$-módulos sobre um espaço profinito X para algum grupo profinito G e anel profinito Λ. Então, temos*

$$H_n\left(G, \coprod_{x \in X} \mathcal{M}(x)\right) \simeq \coprod_{x \in X} H_n(G, \mathcal{M}(x))\,.$$

Corolário 1.4.2 (Fórmula das classes duplas)**.** *Seja G um grupo profinito e H e K dois subgrupos fechados de G. Então, para todo anel profinito Λ, temos um isomorfismo de $[[\Lambda K]]$-módulos profinitos:*

$$[[\Lambda(G/K)]] \simeq \coprod_{x \in H \backslash G/K} [[\Lambda(H/H \cap xKx^{-1})]]$$

1.5 Construções pro-p livres

Sejam $\{G_\alpha \mid \alpha \in A\}$ grupos pro-p. Uma família de homomorfismos $\{\psi_{\alpha,j}\colon G_\alpha \to K\}$ em um grupo pro-p K é dita convergente se todo subgrupo normal aberto H de K contém quase todas as imagens $\psi_{\alpha,j}(G_\alpha)$. Dizemos que um grupo pro-p G é um produto livre dos grupos G_α se existem homomorfismos contínuos convergentes $\phi_\alpha\colon G_\alpha \to G$ tais que para todo grupo pro-p H e homomorfismos contínuos convergentes $\psi_\alpha\colon G_\alpha \to H$ existe um único homomorfismo contínuo $\psi\colon G \to H$ fazendo o diagrama abaixo comutar:

$$\begin{tikzcd} G \arrow[dr, "\psi"] & \\ G_\alpha \arrow[u, "\phi_\alpha"] \arrow[r, "\psi_\alpha"'] & H \end{tikzcd}$$

O produto pro-p livre G sempre existe e é único a menos de único isomorfismo por sua propriedade universal, e o denotaremos por

$$G = \coprod_{\alpha \in A} G_\alpha \,.$$

Alguns fatos fundamentais sobre produtos pro-p livres serão necessários para o nosso estudo da propriedade de Howson em produtos pro-p livres no Capítulo 4. O primeiro deles é que o produto pro-p livre satisfaz:

Proposição 1.5.1. *Sejam G_1 e G_2 grupos pro-p não-triviais e tome $G = G_1 \coprod G_2$. Então, G é infinito.*

Também necessitaremos do fato de que, assim como no caso abstrato, o número minimal de geradores topológicos é aditivo sob a operação de produtos pro-p livres:

Teorema 1.5.2 (Versão pro-p do Teorema de Grushko-Neumann [Lub82, Prop. 2.9])**.** *Sejam G e H dois grupos pro-p finitamente gerados. Então, $d(G \coprod H) = d(G) + d(H)$.*

Dado um grupo pro-p G e um subgrupo fechado H deste, precisaremos de ferramentas para testarmos se H é um fator livre de G, isto é, se existe um subgrupo fechado K de G tal que $G \simeq H \coprod K$. O seguinte critério será também usado no Capítulo 4:

Lema 1.5.3 ([Lub82, Lem. 3.1])**.** *Sejam F um grupo pro-p livre finitamente gerado e H um subgrupo fechado de F. Então, são equivalentes:*

(a) H é um fator livre de F, isto é, existe um subgrupo fechado K de F tal que a aplicação $H \coprod K \to F$ induzida pelas inclusões é um isomorfismo.

(b) $\Phi(F) \cap H = \Phi(H)$.

Esta caracterização dos fatores livres de um grupo pro-p livre topologicamente finitamente gerado pode ser utilizada para mostrarmos que estes grupos satisfazem uma versão pro-p da propriedade de M. Hall, isto é, que subgrupos fechados topologicamente finitamente gerados destes são virtualmente fatores livres; fato que será novamente necessário para o desenvolvimento dos argumentos do Capítulo 4 sobre produtos pro-p livres.

Teorema 1.5.4 (Versão pro-p do Teorema de Marshall Hall, [Lub82, Teo. 3.2])**.** *Seja F um grupo pro-p livre de posto $2 \leq d(F) < \infty$. Se H é um subgrupo fechado e topologicamente finitamente gerado de F, então existe um subgrupo aberto K de F tal que H é um fator livre de K.*

Outro critério que também será aplicado no Capítulo 4 é dado pelo lema a seguir.

Lema 1.5.5 ([SZ19, Lem. 4.1])**.** *Sejam H um grupo pro-p, F um grupo pro-p livre e $G = H \coprod F$. Se K é um subgrupo fechado de G tal que a restrição da projeção $G \to F$ para K é um isomorfismo, então $G = H \coprod K$.*

Se G é um grupo pro-p dado por um produto pro-p livre $\coprod_{\alpha \in A} G_\alpha$ e H é um subgrupo fechado de G, mesmo se H não for um fator livre de G, podemos decompor H em um produto pro-p livre de subgrupos dos fatores livres G_α e alguns de seus conjugados. Esta é a chamada *decomposição de Kurosh* do subgrupo H, em analogia a decomposição existente no caso de produtos livres entre grupos abstratos. Nos Capítulos 3 e 4, precisaremos de duas versões pro-p do teorema da decomposição de Kurosh, enunciados a seguir. Chamamos a atenção para a validade de um teorema de decomposição mais geral do que os aqui enunciados, dado em [Mel90, Prop. 5.2].

Teorema 1.5.6 (Versão pro-p do Teorema da Decomposição de Kurosh para subgrupos abertos, [BNW71])**.** *Seja H um subgrupo aberto do produto pro-p livre*

$$G = \coprod_{\alpha \in A} G_\alpha \,.$$

Então, para cada $\alpha \in A$, existe um conjunto D_α de representantes das classes laterais duplas $H \backslash G / G_\alpha$ tal que as inclusões

$$\{uG_\alpha u^{-1} \cap H \hookrightarrow H \mid u \in D_\alpha, \alpha \in A\}$$

convergem, e H é o produto pro-p livre

$$H \simeq \left[\coprod_{\alpha \in A, u \in D_\alpha} uG_\alpha u^{-1} \cap H \right] \coprod F\,,$$

onde F é um grupo pro-p livre de posto finito.

Teorema 1.5.7 (Versão pro-p do Teorema da Decomposição de Kurosh para subgrupos finitamente gerados [HR87, Teo. 4.4])**.** *Seja H um subgrupo fechado topologicamente finitamente gerado do produto pro-p livre*

$$G = \coprod_{\alpha \in A} G_\alpha \,.$$

Então, existe um subconjunto finito $A_H \subseteq A$ tal que para cada $\alpha \in A_H$ existe um conjunto D_α de representantes das classes laterais duplas $H \backslash G / G_\alpha$ tal que as inclusões

$$\{uG_\alpha u^{-1} \cap H \hookrightarrow H \mid u \in D_\alpha \,, \alpha \in A_H\}$$

convergem, e H é o produto pro-p livre

$$H \simeq \left[\coprod_{\alpha\in A_H, u\in D_\alpha} uG_\alpha u^{-1} \cap H \right] \coprod F$$

onde F é um grupo pro-p livre de posto finito. Além disso, temos que $\alpha G_x \alpha^{-1} \cap H = \{1\}$ para todo $\alpha \in G$ e $x \in A - A_H$.

Também é válido, no universo pro-p, uma versão do Teorema de Howson para subgrupos topologicamente finitamente gerados de grupos pro-p livres:

Teorema 1.5.8 (Versão pro-p do Teorema de Howson, [Lub82, Prop. 3.6])**.** *Seja F um grupo pro-p livre de posto finito. Então, a interseção de dois subgrupos topologicamente finitamente gerados de F é novamente topologicamente finitamente gerada.*

A *propriedade de Howson* é a propriedade dos grupos pro-p que satisfazem o enunciado deste teorema, isto é, são os grupos pro-p G tais que a interseção $H \cap K$ de quaisquer subgrupos fechados topologicamente finitamente gerados H e K de G é novamente topologicamente finitamente gerada, e será estudada no Capítulo 3.

1.6 Grafos profinitos

Um *grafo profinito* é um espaço topológico profinito, isto é, compacto, Hausdorff e totalmente desconexo, denotado por Γ, juntamente com um subconjunto distinguido $V(\Gamma)$ não-vazio cujos elementos são denominados *vértices* de Γ; além disso, deve existir um par de funções contínuas $d_0, d_1 \colon \Gamma \to V(\Gamma)$ denominadas *incidências* de Γ que, restritas à $V(\Gamma)$, coincidam com a identidade. As *arestas* de Γ são os elementos de $E(\Gamma) = \Gamma - V(\Gamma)$.

Um subespaço profinito Δ de Γ é dito um *subgrafo* de Γ se $d_i(\Delta) \subseteq \Delta$ para $i \in \{0, 1\}$. Neste caso, temos $V(\Delta) = V(\Gamma) \cap \Delta$ e $E(\Delta) = E(\Gamma) \cap \Delta$. Um *quasimorfismo* (ou qmorfismo) de grafos profinitos é uma função contínua $\varphi \colon \Gamma_1 \to \Gamma_2$ que leva vértices em vértices. Se $\varphi(e) \in E(\Gamma_2)$ para todo $e \in E(\Gamma_1)$, isto é, se φ leva arestas em arestas, dizemos que φ é um *morfismo* de grafos profinitos. Um grafo profinito Γ é dito *conexo* se, para todo quasimorfismo $\varphi \colon \Gamma \to A$ com A um grafo finito, a imagem $\varphi(\Gamma)$ é conexa como um grafo abstrato. Uma *componente conexa* de um grafo profinito Γ é um subgrafo fechado conexo maximal.

Sejam Λ um anel profinito, Γ um grafo profinito e

$$(E^*(\Gamma), *) = (\Gamma/V(\Gamma), V(\Gamma))$$

o quociente de Γ pelo seu subespaço de vértices $V(\Gamma)$ com ponto distinguido dado pela imagem de $V(\Gamma)$. Denotamos por $C(\Gamma, \Lambda)$ o *complexo de Λ-módulos profinitos associados à* Γ por

$$0 \to [[\Lambda(E^*(\Gamma), *)]] \xrightarrow{d} [[\Lambda V(\Gamma)]] \xrightarrow{\epsilon} \Lambda \to 0\,.$$

O mapa d é induzido por $d_1 - d_0$ e ϵ é induzido pela função constante igual a 1. Note que se $E(\Gamma)$ é fechado em Γ, temos que $[[\Lambda(E^*(\Gamma), *)]] = [[\Lambda E(\Gamma)]]$. Os *grupos de homologia* de Γ são definidos por

$$H_0(\Gamma, \Lambda) = \mathrm{Ker}(\epsilon)/\,\mathrm{Im}(d)\,, \quad H_1(\Gamma, \Lambda) = \mathrm{Ker}(d)\,.$$

Se $\Gamma = \varprojlim \Gamma_i$, então $H_k(\Gamma, \Lambda) = \varprojlim H_k(\Gamma_i, \Lambda)$. Um grafo profinito Γ é conexo se, e somente se, $H_0(\Gamma, \Lambda) = 0$ para algum (e, logo, para todo) anel profinito Λ. Um grafo profinito conexo Γ é uma *p-árvore* se $H_1(G, \mathbb{Z}_p) = 0$. Equivalentemente, Γ é uma p-árvore se $H_k(G, \mathbb{Z}_p) = 0$ para $k \in \{0, 1\}$.

Um *grafo de grupos pro-p finito* é um par de espaços profinitos $(\mathcal{G}, \Gamma)$ e funções contínuas $\partial_0, \partial_1 \colon \mathcal{G} \to \mathcal{G}$ tais que Γ é um grafo finito, $\mathcal{G} = \bigcup_{x \in \Gamma} \mathcal{G}(x)$ é o espaço profinito dado pela união disjunta dos grupos pro-p $\mathcal{G}(x)$ para cada $x \in \Gamma$ como espaços topológicos e as funções ∂_i satisfazem (i) a restrição de ∂_i à $\mathcal{G}(x)$ é um homomorfismo e sua imagem está contida em $\mathcal{G}(d_i(x))$ para todo $x \in \Gamma$, (ii) ∂_i restrita $\mathcal{G}(v)$ é a identidade para todo $v \in V(\Gamma)$ e (iii) ∂_i restrita a $\mathcal{G}(e)$ é injetiva para todo $e \in E(\Gamma)$. Os grupos $\mathcal{G}(v)$ para $v \in V(\Gamma)$ são chamados *grupos de vértices*, e os grupos $\mathcal{G}(e)$ para $e \in E(\Gamma)$ são chamados de *grupos de arestas*. Dado um grafo de grupos pro-p finito $\mathcal{G}$, denotamos por $\mathcal{G}_V$ o grafo de grupos pro-p finito dado pela união $\bigcup_{v \in V(\Gamma)} \mathcal{G}(v)$ grupos de vértices.

Se $(\mathcal{G}, \Gamma)$ é um grafo de grupos sobre um grafo finito e conexo Γ, definimos o *grupo fundamental* $\Pi_1(\mathcal{G}, \Gamma)$ deste grafo de grupos da seguinte forma: seja T um subgrafo de Γ dado por uma árvore maximal e seja $L = E(\Gamma) - E(T)$. Fazendo F_L o grupo pro-p livre sobre o conjunto L, temos:

$$\Pi_1(\mathcal{G}, \Gamma) = \left(\left(\coprod_{v \in V(\Gamma)} \mathcal{G}(v) \right) \coprod F_L \right) /N$$

onde N é o subgrupo fechado gerado como subgrupo normal pelo conjunto

$$\{\partial_0(x)^{-1} e \partial_1(x) e^{-1} \mid e \in L\,, x \in \mathcal{G}(e)\}\,.$$

Exemplo 1.6.1. Seja $G = \coprod_{i=1}^n G_i$ o produto pro-p livre dos grupos G_i. Então, G é isomorfo ao grupo fundamental do grafo de grupos dado pela Figura 1.1.

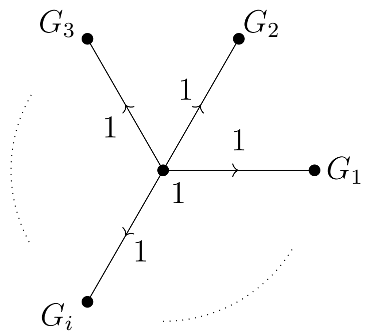

Figura 1.1 Grafo de grupos pro-p associado ao produto pro-p livre $\coprod_{i=1}^{n} G_i$. Temos $\mathcal{G}(e) = 1$ para toda aresta e.

Além disto, existe uma p-árvore Γ' padrão sobre a qual G age continuamente tal que $G\backslash\Gamma' = \Gamma$ [Rib17, Sec. 6.3]. ■

Os seguintes resultados acerca da identificação de um grupo pro-p com o grupo fundamental de um grafo de grupos pro-p finito serão necessários no Capítulo 4 para a classificação dos grupos pro-p que satisfazem a propriedade de M. Hall:

Teorema 1.6.2 ([WZ17, Thm. 3.6]). *Seja G um grupo pro-p topologicamente finitamente gerado contendo um subgrupo aberto normal H que se decompõe como um produto livre pro-p*

$$H = \left(\coprod_{i=1}^{n} H_i\right) \coprod F$$

com $H_i \not\simeq \mathbb{Z}_p$ sendo um grupo pro-p livremente indecomponível para todo $1 \leq i \leq n$ e F um grupo pro-p livre (não-trivial se $n = 1$). Então, existe um grafo de grupos pro-p finito e conexo $(\mathcal{G}, \Gamma)$ tal que:

(1) Temos $G \simeq \Pi_1(\mathcal{G}, \Gamma)$.

(2) Para toda aresta $e \in E(\Gamma)$ temos que $H \cap \mathcal{G}(e) = \{1\}$.

(3) Existe um vértice $v \in V(\Gamma)$ tal que $H_1 = H \cap \mathcal{G}(v)$.

Corolário 1.6.3 ([WZ17, Cor. B]). *Seja G um grupo pro-p topologicamente finitamente gerado e livre-de-torção. Se G possui um subgrupo aberto U que se decompõe em um produto pro-p livre não-trivial (isto é, existem subgrupos próprios não triviais H e K de U tais que $U = H \coprod K$), então G se decompõe em um produto pro-p livre não trivial.*

Capítulo 2

Grupos de Dëmushkin

Grupos de Dëmushkin são, além do principal objeto de estudo desta dissertação, os análogos pro-p dos grupos de superfície. De fato, grupos de Dëmushkin compartilham diversas similaridades com os grupos de superfície: no mundo pro-p, eles são os grupos que satisfazem a dualidade de Poincaré em dimensão 2 com coeficientes em $\mathbb{F}_p$, compartilham várias propriedades com a classe dos grupos pro-p livres e inclusive contêm estes como subgrupos fechados de índice infinito. Há também uma apresentação "canônica" para cada grupo de Dëmushkin G dada em função de seus invariantes d, q e χ, descritos neste capítulo, reminiscente da apresentação abstrata de um grupo de superfície.

O primeiro trabalho publicado acerca dos grupos de Dëmushkin foi o artigo de 1954 por Y. Kawada [Kaw54]. Neste período o interesse nestes grupos era puramente aritmético, isto é, estudavam-se apenas os grupos de Dëmushkin como alguns grupos de Galois de p-extensões maximais de certos corpos locais. Kawada demonstrou que, se K é uma extensão finita de $\mathbb{Q}_p$ de grau n contendo uma raiz p-ésima da unidade não trivial, então o grupo de Galois G da p-extensão maximal de K é um grupo pro-p com $d(G) = n + 2$ geradores e uma única relação no sentido de uma apresentação pro-p de G. O caso em que K não continha raízes p-ésimas da unidade não trivais havia sido resolvido por I. Shafarevich, um mentor de S. Dëmushkin, alguns anos antes em [Sha47]. Além disto, é neste trabalho de Kawada que foi demonstrada a afirmação de que G deve satisfazer as condições cohomológicas descritas neste capítulo, que hoje reconhecemos ser a dualidade de Poincaré em dimensão 2 para grupos pro-p. Assim, Kawada também demonstrou que a relação deste grupo G deve ser "completa" no sentido de envolver todos os $d(G)$ geradores independente da escolha de conjunto gerador. O artigo, entretanto, não fornecia uma expressão para a relação definidora de G.

Seguindo o trabalho de Kawada, no caso em que K contém todas as raízes p-ésimas da unidade, A. Skopin demonstrou em um artigo de 1955 [Sko55] que todos os quocientes finitos do grupo de Galois associado G, isto é, os grupos de Galois correspondendo a p-extensões finitas de K, são imagens homomórficas de um grupo abstrato de superfície. Isto fortaleceu ainda mais a convicção de que a apresentação pro-p de G deveria ser similar às apresentações abstratas dos grupos de superfície. Além disto, em [FS59], Skopin e seu orientador de doutorado D. Faddeev obtiveram uma demonstração mais simples para os resultados de Kawada.

O primeiro estudo dos grupos satisfazendo a condição cohomológica de Kawada por seu próprio interesse algébrico foi publicado em 1961 no artigo [Dë61] de S. Dëmushkin ([dʲˈomuʃkʲin], ou ***DYÔ**-mush-quin*). Buscando caracterizar todos os grupos pro-p topologicamente finitamente gerados e sujeitos a uma única relação completa, Dëmushkin foi o primeiro a obter uma fórmula "canônica" para a apresentação pro-p de G em função dos invariantes numéricos d e q. Com a publicação de seu artigo seguinte [Dë63] em 1963, sua classificação corresponde à parte (1) ($q \neq 2$) do Teorema 2.3.9.

Durante os anos 60 deu-se sequência à busca por uma fórmula "canônica" descrevendo a relação de um grupo de Dëmushkin para $q = 2$. O caso em que $d(G)$ é ímpar foi classificado por J. P. Serre em 1964 [Ser64], e o caso em que $d(G)$ é par foi classificado de forma independente em 1965 por Dëmushkin em [Dë65] e por J. Labute em sua tese de doutorado [Lab67], orientado por Serre e J. Tate. O livro de J.P. Serre [Ser97] e a tese de J. Labute [Lab67] são as principais referências para este capítulo.

Na Seção 2.1, definimos os grupos de Dëmushkin e seus invariantes numéricos d e q, bem como fornecemos diversos exemplos concretos destes grupos como o grupo cíclico $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, subgrupos do grupo de transformações afins $\mathrm{Aff}(\mathbb{Z}_p)$ e alguns completamentos pro-p de grupos de superfície. Na Seção 2.2, exploramos o papel do invariante ciclotômico χ, um objeto algébrico associado aos grupos de Dëmushkin que refina o invariante q. Na Seção 2.3, demonstramos o Teorema de Classificação dos grupos de Dëmushkin como feito em [Lab67], e exploramos alguns de seus corolários.

2.1 Definição e os invariantes numéricos d e q

Para um grupo pro-p G, denotamos os grupos de cohomologia $H^i(G, \mathbb{F}_p)$ simplesmente por $H^i(G)$. Relembramos que há um isomorfismo $H^1(G) \simeq (G/\Phi(G))^*$; em particular, se G é topologicamente finitamente gerado, temos também que $H^1(G) \simeq G/\Phi(G)$ como $\mathbb{F}_p$-espaços vetoriais. Além disto, a dimensão de $H^2(G)$ sobre $\mathbb{F}_p$ é igual ao número minimal de relações em uma apresentação pro-p minimal para G.

Definição 2.1.1. Um grupo pro-p G que satisfaz as condições **P1'-P3'** da Definição 1.3.5 em dimensão 2 é dito um *grupo de Dëmushkin*. Para $n = 2$, estas condições são:

D1 $H^1(G)$ é finito;

D2 $\dim_{\mathbb{F}_p} H^2(G) = 1$;

D3 O produto cup

$$\cup\colon H^1(G) \times H^1(G) \to H^2(G)$$

é uma forma bilinear não degenerada.

Assim, todo grupo de Dëmushkin G é um grupo pro-p topologicamente finitamente gerado sujeito a uma única relação por **D1** e **D2** respectivamente. Tendo em vista a Proposição 1.3.6, ou G é finito, ou G satisfaz a dualidade de Poincaré em dimensão 2 e logo $\mathrm{cd}(G) = 2$.

Exemplo 2.1.2. Pelo Exemplo 1.3.7, $\mathbb{Z}_p^2$ é um grupo de Dëmushkin, e o único grupo de Dëmushkin infinito e comutativo a menos de isomorfismo. ■

Antes de apresentarmos mais exemplos de grupos de Dëmushkin, vamos definir alguns invariantes associados a G e explorar algumas de suas propriedades.

Definição 2.1.3. Seja G um grupo de Dëmushkin. O número minimal de geradores topológicos de G será denotado o *invariante* $d(G)$ e é igual à dimensão de $H^1(G)$ sobre $\mathbb{F}_p$. Quando o grupo G estiver claro pelo contexto, nos restringiremos a escrever d para $d(G)$.

Escolhamos um conjunto minimal de geradores $x_1, \cdots, x_d$ para G, e consideremos o homomorfismo quociente canônico $F \to G$ do grupo pro-p livre F sobre o conjunto $x_1, \cdots, x_n$. Tomemos por L seu núcleo; como $\dim_{\mathbb{F}_p} H^2(G) = 1$, existe algum elemento $r \in L$ que gera L topologicamente como subgrupo normal. Neste capítulo, F e L sempre denotarão o grupo pro-p livre e seu subgrupo normal assim definidos.

Notemos que a abelianização F^{ab} de F é isomorfa a $\mathbb{Z}_p^d$. A aplicação sobrejetora $F \to G$ induz, nas abelianizações, outra sobrejeção $F^{\mathrm{ab}} \to G^{\mathrm{ab}}$, e seu núcleo é precisamente a imagem de L em F^{ab}. Esta deve ser deve ser ou trivial, se L estiver contido em $[F, F]$, ou isomorfa à $\mathbb{Z}_p$ uma vez que L é topologicamente gerado pelos conjugados de um único elemento em F.

Proposição 2.1.4. *Existe um único inteiro não negativo q, ou igual a 0 ou igual a uma potência de p, tal que a abelianização de um grupo de Dëmushkin G satisfaz:*

$$G^{ab} \simeq \mathbb{Z}_p/q\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p^{d-1}\,. \tag{2.1}$$

Demonstração. Mantendo a notação do parágrafo anterior, já mostramos que G^{ab} é quociente de $F^{\mathrm{ab}} \simeq \mathbb{Z}_p^d$ por um subgrupo fechado H que é ou trivial ou isomorfo a $\mathbb{Z}_p$. Se H for trivial, a expressão (2.1) é satisfeita com $q = 0$. Suponha, então, que $H \simeq \mathbb{Z}_p$ é topologicamente gerado por algum elemento $y \in F^{\mathrm{ab}}$. Passemos à notação aditiva. Como $\Phi(G^{\mathrm{ab}}) = pG^{\mathrm{ab}}$ e a aplicação induzida nos quocientes de Frattini $F^{\mathrm{ab}}/\Phi(F^{\mathrm{ab}}) \to G^{\mathrm{ab}}/\Phi(G^{\mathrm{ab}})$ é um isomorfismo, temos que y está contido no núcleo pF^{ab} da projeção $F^{\mathrm{ab}} \to F^{\mathrm{ab}}/\Phi(F^{\mathrm{ab}})$. Assim, como y é não trivial e os subgrupos $p^f F^{\mathrm{ab}}$ formam um sistema fundamental de vizinhanças do 0 em F^{ab}, podemos tomar uma potência p^f maximal para a qual existe $x \in F^{\mathrm{ab}}$ tal que $y = p^f x$. Pela maximalidade de f, a imagem de x no quociente de Frattini $F^{\mathrm{ab}}/\Phi(F^{\mathrm{ab}}) \simeq F^{\mathrm{ab}}/pF^{\mathrm{ab}}$ é não trivial e portanto x pode ser completado em uma base $x_1, \cdots, x_d$ de F^{ab}. Assim, demonstramos que a expressão (2.1) é satisfeita com $q = p^f$. A unicidade é imediata, uma vez que q é completamente determinado pela ordem do subgrupo de torção de G^{ab}. □

Definição 2.1.5. Definimos o *invariante* $q(G)$ como o único inteiro não negativo q que satisfaz a expressão (2.1) da Proposição 2.1.4. Temos que:

$$q(G) = \begin{cases} 0, \text{ se } G^{\mathrm{ab}} \text{ é livre-de-torção;} \\ |\mathrm{tor}(G^{\mathrm{ab}})| = q, \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

Quando o grupo G estiver claro pelo contexto, nos restringiremos a escrever q para $q(G)$.

Exemplo 2.1.6. O único grupo de Dëmushkin finito é $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, a menos de isomorfismo. De fato, suponha que G seja um grupo de Dëmushkin finito. Como G^{ab} também é finito, pela fórmula da abelianização de G (Equação (2.1)) devemos ter $d = 1$, ou seja, G é cíclico de ordem q. Dado que o produto cup satisfaz uma anticomutatividade graduada, para qualquer $\eta \in H^1(G)$, temos que $2(\eta \cup \eta) = 0$ em $H^2(G)$. Tomando $\eta \neq 0$, uma vez que o produto cup é não degenerado e $H^1(G) = \langle \eta \rangle$, podemos concluir que $\eta \cup \eta \neq 0$ em $H^2(G)$. Entretanto, $H^2(G) \simeq \mathbb{F}_p$ é um grupo p-aniquiliado, e $\eta \cup \eta$ possui ordem 2. Assim, $p = 2$.

Para mostrarmos que $q = 2$, é suficiente mostrarmos que $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ não é um grupo de Dëmushkin, uma vez que todo subgrupo aberto de um grupo de Dëmushkin é novamente um grupo de Dëmushkin. Como a projeção $f\colon \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \to \mathbb{F}_2$ define um gerador de $H^1(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$, basta mostrarmos então que $(f \cup f)(x, y) = (xy \mod 2)$ é um cobordo. Seja $u\colon \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \to \mathbb{F}_2$ a 1-cocadeia que se anula apenas em 0 e 1. Um cálculo direto, realizado na Tabela 2.1, nos mostra que $du = f \cup f$ como desejado.

	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	0	1
2	0	0	0	0
3	0	1	0	1

Tabela 2.1 Tabela de valores para a 2-cocadeia $du\colon \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \to \mathbb{F}_2$

Alternativamente, podemos olhar quais são as $\mathbb{F}_2$-álgebras dadas pelos anéis de cohomologia dos grupos cíclicos $\mathbb{Z}/2^k\mathbb{Z}$:

$$H^*(\mathbb{Z}/2^k\mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{F}_2[\eta, \xi \,|\, \deg \eta = 1, \deg \xi = 2, \eta \cup \eta = 0], \text{ se } k > 1\,, \\ \mathbb{F}_2[\eta \,|\, \deg \eta = 1], \text{ se } k = 1\,. \end{cases}$$

Estas fórmulas são encontradas, por exemplo, na Sec. 3.2 de [Eve91]. O único grupo cujo produto cup $H^1(\mathbb{Z}/2^k\mathbb{Z}) \times H^1(\mathbb{Z}/2^k\mathbb{Z}) \to H^2(\mathbb{Z}/2^k\mathbb{Z})$ é não degenerado é dado pelo grupo cíclico de ordem 2. Assim, concluímos que há um isomorfismo $G \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. ■

Introduziremos uma construção útil para o cálculo dos produtos cup em grupos pro-p topologicamente finitamente gerados e sujeitos a uma única relação, sugerida em [Ser64, Sec. 9] e apresentada em [Lab67]. Esta construção será utilizada no Exemplo 2.1.8 para exibirmos explicitamente apresentações pro-p de uma família de grupos de Dëmushkin, e na Seção 2.3 para obtermos o Teorema de Classificação.

Construção 2.1.7. Seja G um grupo pro-p satisfazendo **D1** e **D2** ($|H^1(G)| < \infty$ e $\dim_{\mathbb{F}_p} H^1(G) = 1$) e fixe um conjunto minimal de d geradores $x_1, \cdots, x_d$. Como $H^1(G) \simeq \operatorname{Hom}(G, \mathbb{F}_p) \simeq \operatorname{Hom}(G/\Phi(G), \mathbb{F}_p)$, uma base para $H^1(G)$ é dada pelas classes das aplicações $\eta_i \colon G \to \mathbb{F}_p$ definidas por $\eta_i(x_j) = \delta_{ij}$.

Por hipótese, existe um isomorfismo entre $H^2(G)$ e $\mathbb{F}_p$. Nossa escolha particular de isomorfismo será dada pela sequência exata de cinco termos e uma apresentação minimal de G: mantemos a notação de F como o grupo pro-p livre sobre $x_1, \cdots, x_d$ e L como o núcleo da projeção $F \to G$, gerado como subgrupo normal fechado por $r \in L$. A sequência exata de cinco de termos

$$0 \to H^1(G) \to H^1(F) \to H^1(L)^F \xrightarrow{\text{tr}} H^2(G) \to H^2(F)$$

nos garante que a transgressão tr é um isomorfismo, uma vez que $\dim_{\mathbb{F}_p} H^1(G) = \dim_{\mathbb{F}_p} H^1(F) = d$. Assim, definimos um isomorfismo $\overline{r} \colon H^2(G) \to \mathbb{F}_p$ dado por

$$\overline{r}(\theta) = (\text{tr}^{-1}\theta)(r^{-1})\,.$$

A escolha de r^{-1} no isomorfismo facilitará o enunciado do Lema 2.3.2 mais adiante.

Relembremos como $\operatorname{tr}(\eta)$ foi definida para uma classe $\eta \in H^1(L)^F$: se η é representada por um homomorfismo $f \colon L \to \mathbb{F}_p$, então estendemos f a uma 1-cocadeia $\tilde{f} \colon F \to \mathbb{F}_p$ através de uma escolha de seção contínua $s \colon F/L \to F$. Explicitamente, como a ação de F sobre $\mathbb{F}_p$ é trivial, definimos $\tilde{f}(x) = f(s(xL)^{-1}x)$. Como f é um homomorfismo, temos que

$d\tilde{f}\colon F^2 \to \mathbb{F}_p$ se anula em L^2 e, portanto, se fatora através de $F^2 \to G^2$. Deste modo, $\mathrm{tr}(\eta)$ é a classe em $H^2(G)$ representada por $d\tilde{f}$.

Agora, considere a classe de $\eta_i \cup \eta_j$ em $H^2(G)$, e vamos inverter a definição da transgressão para encontrarmos $\mathrm{tr}^{-1}(\eta_i \cup \eta_j)$. A inflação $\inf_G^F(\eta_i \cup \eta_j)$ é um cobordo, uma vez que $H^2(F) = 0$, e, portanto, existe uma função contínua $u\colon F \to \mathbb{F}_p$ tal que $du\colon F^2 \to \mathbb{F}_p$ se fatora através da projeção $F^2 \to G^2$ e de $\eta_i \cup \eta_j\colon G^2 \to \mathbb{F}_p$. Disto, podemos concluir que du é identicamente nula em L^2, isto é, que u, quando restrita a L, é um homomorfismo. Além disto, como os elementos de $\mathrm{Hom}(F, \mathbb{F}_p)$ são 1-cociclos, podemos subtraí-los de u sem alterar o valor de du, e deste modo, após a substituição de u por $u - \sum_{i=1}^d \inf_G^F \eta_i$, podemos sempre assumir que $u(x_i) = 0$ para todo $1 \le i \le d$. Assim, a função u satisfaz

$$u(xy) = u(x) + u(y) - \eta_i(x)\eta_j(y) \tag{2.2}$$

para quaisquer x e y em F.

Para demonstrarmos que $\mathrm{res}_L^F u$ representa $\mathrm{tr}^{-1}(\eta_i \cup \eta_j)$, resta apenas mostrarmos que $\mathrm{res}_L^F u$ pertence a $H^1(L)^F$, isto é, que $u(gxg^{-1}) = u(x)$ para todo $x \in L$ e $g \in G$. Para isto, calculamos através de repetidas aplicações da identidade da equação (2.2):

$$\begin{aligned} u(gxg^{-1}) - u(x) &= u(gx) + u(g^{-1}) + \eta_i(gx)\eta_j(g) - u(x) \\ &= u(gx) - u(g) - \eta_i(g)\eta_j(g) + \eta_i(g)\eta_j(g) + \eta_i(x)\eta_j(g) - u(x) \\ &= u(g) + u(x) - \eta_i(g)\eta_j(x) - u(g) - u(x)\,, \quad \text{pois } \eta_i(x) = 0 \\ &= -\eta_i(g)\eta_j(x) = 0\,, \quad \text{pois } \eta_j(x) = 0\,. \end{aligned}$$

Temos então que o elemento $\mathrm{tr}^{-1}(\eta_i \cup \eta_j)$ é representado pela classe de $\mathrm{res}_L^F u$, onde $u\colon F \to \mathbb{F}_p$ se anula na base $x_1, \cdots, x_d$ e satisfaz a identidade da equação (2.2). ∎

A identidade da equação (2.2) pode ser usada recursivamente para calcular o valor de $\overline{r}(\eta_i \cup \eta_j) = u(r^{-1})$ quando r é expressa em termos dos geradores de F. No Lema 2.3.2, derivaremos uma fórmula para $\overline{r}(\chi_i \cup \chi_j)$ em função de um conjunto gerador minimal $x_1, \cdots, x_d$ de G. No exemplo a seguir, utilizaremos esta construção diretamente para verificarmos a condição **D3** e apresentarmos uma família de grupos de Dëmushkin não comutativos.

Exemplo 2.1.8 ([Ser97, Exer. 3 da Sec. I.4.5])**.** Para cada $\alpha \in \mathbb{Z}_p^\times$ e cada potência $q > 1$ de p, defina o inteiro p-ádico $z = 1 + q\alpha$ e o grupo pro-p G dado pela apresentação pro-p

$$G = \langle x, y \mid xyx^{-1} = y^z \rangle = \langle x, y \mid y^{-q\alpha}[x, y] = 1 \rangle\,, \tag{2.3}$$

onde y^z é a imagem de z através do isomorfismo $\mathbb{Z}_p \simeq \langle y \rangle \subseteq G$ que identifica o gerador 1 de $\mathbb{Z}_p$ com y; isto é, se $z = \lim_{i\to\infty} z_i$ com cada $z_i \in \mathbb{Z}$, então y^z é o limite das potências y^{z_i}.

Vamos primeiro verificar que a apresentação (2.3) é uma apresentação minimal para G. Tomando o grupo pro-p livre F sobre os símbolos x e y, temos que os duais η_x e η_y de x e y em $H^1(F)$ se fatoram através de G, e, portanto, também definem classes linearmente independentes em $H^1(G)$. Assim, concluímos que $d(G) = 2$ e que as classes de η_x e η_y formam uma base de $H^1(G) \simeq H^1(F)$.

Além disso, temos que G não pode ser um grupo pro-p livre. Se este fosse o caso, existiria um homomorfismo sobrejetor $\varphi\colon G \to \mathbb{Z}_p^2$. Entretanto, tal φ iria se fatorar através de G^{ab}, e como y satisfaz $y^{-q\alpha} \equiv 1 \pmod{[G,G]}$ e $\mathbb{Z}_p^2$ é livre-de-torção, deveríamos ter $\varphi(y) = 0$. Assim, a imagem de φ seria procíclica, gerada por $\varphi(x)$, uma contradição. Logo, podemos concluir que $H^2(G)$ é não trivial, e, uma vez que já fornecemos uma apresentação para G com uma relação, temos que $H^2(G) \simeq \mathbb{F}_p$.

Vamos agora mostrar que G é um grupo de Dëmushkin. Como já demonstramos que $\dim_{\mathbb{F}_p} H^1(G) = 2$ e que $\dim_{\mathbb{F}_p} H^2(G) = 1$, basta mostrarmos que G satisfaz a condição **D3**. Para os geradores η_x e η_y de $H^1(G)$, seja $u\colon F(x,y) \to \mathbb{F}_p$ tal que du representa $\eta_x \cup \eta_y$ como dado pela Construção 2.1.7.

Da equação (2.2), para todo $m \in \mathbb{Z}$ e, por continuidade, todo $m \in \mathbb{Z}_p$, temos que $u(x^m) = u(y^m) = 0$. Também temos, utilizando a relação $u(yx) = u(y^{-1}x^{-1}) = 0$, que

$$u([y,x]) = -\eta_x(yx)\eta_y(y^{-1}x^{-1}) = 1\,.$$

Desta forma, tomando $r = y^{-q\alpha}[x,y]$, podemos concluir que

$$\overline{r}(\eta_x \cup \eta_y) = u([y,x]y^{q\alpha}) = u([y,x]) + u(y^{q\alpha}) + \eta_x([y,x])\eta_y(y^{q\alpha}) = 1 + 0 + 0\,.$$

Assim, $\eta_x \cup \eta_y \neq 0$ em $H^2(G)$ e, portanto, o produto cup é não degenerado.

Agora, passemos ao seu invariante $q(G)$, uma vez que já demonstramos que $d(G) = 2$. Como na demonstração da Proposição 2.1.4, denotando por L o núcleo da projeção $F \to G$, temos que o núcleo H da sobrejeção induzida $F^{\mathrm{ab}} \to G^{\mathrm{ab}}$ é dado pela imagem de L em F^{ab}. Uma vez que L é o subgrupo normal fechado gerado por $y^{-q\alpha}[x,y]$, concluímos que H é topologicamente gerado por $y^{-q\alpha}$ e, uma vez que α é invertível em $\mathbb{Z}_p$, também é gerado por y^q. Portanto, obtemos os isomorfismos:

$$G^{\mathrm{ab}} \simeq F^{\mathrm{ab}}/H \simeq \mathbb{Z}_p/q\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p\,.$$

Logo, o invariante $q(G)$ coincide com a potência q escolhida na definição de G.

Por fim, vejamos que todo grupo G dado pela apresentação pro-p minimal da equação (2.3) se decompõe no produto semidireto $H \rtimes K$ onde H e K são os subgrupos fechados topologicamente gerados por y e x respectivamente. De fato, H é normal em G e seu quociente G/H é gerado pela imagem de x, e logo é procíclico. Isto significa que a projeção $G \to G/H$ se fatora através de $G \to G^{\mathrm{ab}}$, com $G^{\mathrm{ab}} \to G/H$ sendo simplesmente o quociente pelo fator $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$. Assim, $G/H \simeq \mathbb{Z}_p \simeq K$, de onde segue a existência de uma seção do homomorfismo quociente $G \to G/H$ uma vez que $\mathbb{Z}_p$ é pro-p livre. ■

Exemplo 2.1.9. Os grupos do Exemplo 2.1.8 ocorrem todos como subgrupos abertos do subgrupo p-Sylow de $\mathrm{Aff}(\mathbb{Z}_p) \simeq \mathbb{Z}_p \rtimes \mathbb{Z}_p^\times$, o grupo de transformações afins de $\mathbb{Z}_p$ do Exemplo 1.1.2. Para $p \neq 2$, o próprio subgrupo p-Sylow de $\mathrm{Aff}(\mathbb{Z}_p)$ é um grupo de Dëmushkin com invariante $q = p$. Para $p = 2$, o subgrupo 2-Sylow de $\mathrm{Aff}(\mathbb{Z}_2)$ é uma extensão cindida de um grupo do Exemplo 2.1.8 com invariante $q = 2$ por $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

O subgrupo de $\mathrm{Aff}(\mathbb{Z}_p)$ gerado pelas funções afins τ e $s_{-q\alpha}$ dadas por $\tau(x) = x + 1$ e $s_{-q\alpha}(x) = (1 + q\alpha)x$ corresponde ao produto semidireto $\mathbb{Z}_p \rtimes (1 + q\mathbb{Z}_p)$, que é isomorfo ao grupo de Dëmushkin G com apresentação $G \simeq \langle x, y \mid y^{-q\alpha}[x, y] = 1\rangle$ como calculamos ao final do Exemplo 2.1.8. ■

Antes de prosseguirmos, observemos que grupos de Dëmushkin satisfazem uma fórmula estilo "Schreier"/"Hurewicz" para seus subgrupos abertos e seus invariantes d, que chamaremos de fórmula do posto:

Proposição 2.1.10 (Fórmula do posto de um grupo de Dëmushkin [Ser97, Exer. 6 da Sec. I.4.5]). *Se G é um grupo de Dëmushkin, então para todo subgrupo aberto $U \leq G$ temos*

$$d(U) - 2 = [G \colon U](d(G) - 2)\,. \tag{2.4}$$

Demonstração. Isto é uma consequência imediata de que a característica de Euler-Poincaré de G é igual a $2 - d(G)$ e da proporcionalidade desta pelo índice (Proposição 1.3.2). □

De fato, ainda mais é verdade: a fórmula do posto da Proposição 2.1.10 caracteriza os grupos de Dëmushkin entre os grupos pro-p finitamente apresentados e 1 relacionados, isto é, os grupos pro-p satisfazendo as condições **D1** e **D2** da Definição 2.1.1. Isto foi demonstrado de forma independente por I. Andozhskii em [And73] e por D. Dummit e J. Labute em [DL83].

Exemplo 2.1.11. Em 1965, M. Lazard [Laz65, Teo. V.2.5.8] mostrou que todo grupo pro-p analítico p-ádico de dimensão 2 e livre-de-torção é um grupo de Dëmushkin (Exemplo 1.3.8). Para um grupo infinito de Dëmushkin G, as seguintes condições são equivalentes:

(a) G é solúvel;

(b) G é poliprocíclico, isto é, G possui uma série subnormal com quocientes procíclicos;

(c) $[G, G]$ é trivial ou isomorfo à $\mathbb{Z}_p$;

(d) G é 2-gerado;

(e) G é analítico p-ádico.

De fato, como G é infinito, temos que $d(G) > 1$ e portanto a equação (2.1)

$$G^{\mathrm{ab}} \simeq \mathbb{Z}_p/q\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p^{d-1}$$

garante que $[G, G]$ não é aberto em G. Assim, pelo Exemplo 1.3.11, $[G, G]$ é pro-p livre uma vez que $\mathrm{cd}([G, G]) \leq 1$.

Agora, novamente a equação (2.1) nos dá (c) $\implies$ (b). Segue diretamente das definições que (b) $\implies$ (a). Se G é solúvel, então $[G, G]$ também deve o ser, e, como os únicos grupos pro-p livres solúveis são $\mathbb{Z}_p$ ou o grupo trivial a menos de isomorfismo, concluímos que (a) $\implies$ (c). Desta forma, estabelecemos a equivalência das três primeiras propriedades.

Como explicitado no Exemplo 1.3.8, a condição (e) é equivalente a G possuir posto-de-subgrupos finito, isto é, uma cota superior finita no número minimal de geradores dos seus subgrupos abertos (ou, equivalentemente, dos seus subgrupos fechados). A fórmula do posto (Proposição 2.1.10) garante então que (e) $\iff$ (d): se $d(G) = 2$, então $d(U) = 2$ para todo $U \leq G$ aberto, e se $d(G) > 2$, então $d(U)$ cresce linearmente com $[G\colon U]$.

((e) $\implies$ (c)) Se $d([G, G]) \geq 2$, como $[G, G]$ é pro-p livre, pela Proposição 1.3.3 temos que $[G, G]$ possuiria subgrupos abertos V cujo número minimal de geradores cresce ilimitadamente. Assim, $[G, G]$ e, portanto, G, não possuiria posto-de-subgrupos finito.

((c) $\implies$ (e)) A Proposição 1.1.6 afirma que a classe dos grupos analíticos p-ádicos é fechada para extensões. Como G^{ab} é analítico p-ádico (pela equação 2.1), se $[G, G]$ for analítico p-ádico então G também será analítico p-ádico. ■

Exemplo 2.1.12 ([Ser97, Exer. 2 da Sec. I.4.5])**.** Sejam Σ uma 2-variedade real analítica compacta de gênero g e $\Gamma = \pi_1(\Sigma)$ seu grupo fundamental. Suponha que $g \geq 1$ se Σ for orientável ou que $g \geq 2$ se Σ for não-orientável. Então, o completamento pro-p $G = \widehat{\Gamma}_p$ de Γ é um grupo de Dëmushkin se, e somente se, $p = 2$ ou Σ for orientável.

Consideremos os seguintes fatos sobre o grupo abstrato G e a superfície Σ:

(I) Σ é asférica, isto é, $\pi_n(\Sigma) = 0$ para $n > 1$.

(II) Para todo Γ-módulo A, $H^*(\Gamma, A) \simeq H^*(\Sigma, A)$.

Figura 2.1 Todas as superfícies compactas de gênero g são homeomorfas a uma esfera com g alças, a um cross-cap com $(g-1)/2$ alças ou a uma garrafa de Klein com $(g-2)/2$ alças. Nas figura, são representadas as três superfícies respectivamente com 3 alças cada. Temos $g=3$ no caso da esfera, $g=7$ no caso do cross-cap e $g=8$ no caso da garrafa de Klein.

(III) Se M é um Γ-módulo de torção, então $H^k(\Gamma, M) = 0$ para $k > 2$.

(IV) O produto cup $H^i(\Gamma, \mathbb{F}_p) \times H^{2-i}(\Gamma, \mathbb{F}_p) \to H^2(\Gamma, \mathbb{F}_p)$ é não degenerado.

(V) O grupo Γ pode ser dado pelas apresentações

$$\Gamma \simeq \langle x_1, y_1, \cdots, x_g, y_g \mid [x_1, y_1] \cdots [x_g, y_g] = 1 \rangle\,,$$

se Σ for orientável, e pelas apresentações

$$\Gamma \simeq \begin{cases} \langle x_1, \cdots, x_g \mid x_1^2[x_2, x_3] \cdots [x_{g-1}, x_g] = 1 \rangle, \text{ se } g \text{ for ímpar} \\ \langle x_1, \cdots, x_g \mid x_1^2[x_1, x_2] \cdots [x_{g-1}, x_g] = 1 \rangle, \text{ se } g \text{ for par} \end{cases}$$

se Σ for não-orientável.

(VI) Todo subgrupo de índice finito de Γ é novamente o grupo fundamental de uma superfície M' com gênero igual ou superior ao gênero de Σ.

De fato, se C é o recobrimento universal de Σ, então $\pi_n(\Sigma) \simeq \pi_n(C)$ para todo $n > 1$, pela sequência exata longa da filtração [Bre93, Teo. VII.6.7]. Aqui é usado de forma fundamental as hipóteses sobre o gênero g: para estas superfícies e estas superfícies apenas temos um recobrimento universal asférico, dado pelo plano Euclidiano (vide observação após Prop. 7.14 de [Lim03]). Isto estabelece (I).

Tendo (I), a afirmação (II) é consequência de [Eil49, Teo. 14.1], já que (I) implica em Σ ser um espaço $K(\Gamma, 1)$ de Eilenberg-MacLane. Para a afirmação (III), notemos que $H_k(\Sigma, M) = 0$ para $k > 2$ e $H_2(\Sigma, \mathbb{Z})$ é trivial ou isomorfo à $\mathbb{Z}$ de acordo com a orientabilidade de Σ [Bre93, Cor. VI.7.12]. Pelo Teorema dos Coeficientes Universais [Bre93, Cor. V.7.2], temos

$$0 \to \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(H_{k-1}(\Sigma, \mathbb{Z}), M) \to H^k(\Sigma, M) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(H_k(\Sigma, \mathbb{Z}), M) \to 0$$

e portanto $H^k(\Gamma, M) \simeq H^k(\Sigma, M) = 0$ para $k > 2$. (IV) é um caso particular da dualidade de Poincaré para variedades reais [Bre93, Teo. VI.9.4].

As apresentações (V) são derivadas utilizando técnicas da topologia combinatória na Seção 47 de [ST80]. O grupo fundamental de uma superfície compacta não-orientável de gênero g é normalmente exposto pela apresentação

$$\langle x_1, \cdots, x_g \mid x_1^2 \cdots x_g^2 = 1 \rangle .$$

A decomposição dessa apresentação nos casos de g ímpar ou g par é dada ao dividirmos M em duas classes: as superfícies homeomorfas a um cross-cap com $(g-1)/2$ alças e as superfícies homeomorfas a uma garrafa de Klein com $(g-2)/2$ alças. Tendo a classificação das superfícies compactas, essa divisão é uma simples aplicação do Teorema de Seifert-Van Kampen [Bre93, Cor. III.9.6 e Exer. 1-4 da Sec. III.9]. Essa divisão também forma o arquétipo da classificação dos grupos de Dëmushkin de [Lab67].

Por fim, (VI) é uma consequência dos seguintes fatos: (a) há uma correspondência entre recobrimentos de Σ e subgrupos de Γ [Bre93, Teo. III.8.1]; (b) por um recobrimento ser um homeomorfismo local, todo recobrimento de uma superfície é novamente uma superfície; (c) todo recobrimento finito de um espaço compacto é compacto [Hat01, Exer. 3 da Sec. 1.3]; (d) todo complexo CW sobre Σ é levantado através de um recobrimento a um complexo CW, e a quantidade de células é multiplicada pelo grau do recobrimento.

Vamos agora demonstrar que quando Σ é orientável ou quando $p = 2$, o completamento pro-p $G = \widehat{\Gamma}_p$ de Γ é um grupo de Dëmushkin. Como Γ é residualmente p (Teo. 1 de [Bau62]), temos um homomorfismo canônico injetivo $\Gamma \to G$ cuja imagem é densa em G.

Utilizaremos agora a Proposição 1.3.1 para estabelecer uma família de isomorfismos $\rho^i \colon H^i(G, M) \to H^i(\Gamma, M)$ naturais em M para todo G-módulo finito discreto p-primário M. Este argumento é um caso particular do apresentado em [And74, Prop. 14]. Por A(0), sabemos que ρ^0 é um isomorfismo e ρ^1 é injetiva. Como M é finito, para toda $f \in H^1(G, M)$ existe um subgrupo de índice finito Δ de Γ, pré-imagem de um aberto U em G, tal $M^\Delta = M$ e $f(\Delta) = 0$. Assim, todo homomorfismo cruzado $f \colon \Gamma \to M$ se fatora em um homomorfismo cruzado $\Gamma/\Delta \to M$. Como $H^1(G, M) = \varinjlim H^1(G/U, M^U)$, isto estabelece a sobrejetividade de ρ^1. Portanto, por A(1) temos que ρ^2 é injetiva.

Vamos estabelecer agora a propriedade D(2). Como a pré-imagem em Γ do núcleo da ação $G \to M$ é novamente um grupo de superfície, podemos nos reduzir ao caso em que $M \simeq \mathbb{Z}/p^f\mathbb{Z}$ com ação trivial. Como M não é necessariamente um corpo, a dualidade de (IV) pode falhar em ser não degenerada pela presença de um grupo não-trivial $\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(H_1(\Sigma, \mathbb{Z}), M)$. Entretanto, os mesmos argumentos estabelecem que $H^1(\Sigma, M) \times H^1(\Sigma, M) \to H^2(\Sigma, M)$ é sobrejetiva, isto é, o anel de cohomologia de $H^*(\Sigma, M)$ é gerado por $H^1(\Sigma, M)$. Assim, D(1) implica D(2) tomando-se qualquer subgrupo Γ_0 de Γ tal que $H^1(\Gamma, M) \to H^1(\Gamma_0, M)$ seja identicamente nula. Este subgrupo existe pela propriedade D(1), uma vez que $H^1(\Gamma, M) \simeq \Gamma^{\mathrm{ab}}/n\Gamma^{\mathrm{ab}}$ é finitamente gerado.

Logo, ρ^2 é um isomorfismo e ρ^3 é injetiva. Por (III), isto mostra que $\mathrm{cd}(G) \leq 2$. Se Σ é orientável ou $p = 2$, então

$$H^2(G, \mathbb{F}_p) \simeq H^2(\Gamma, \mathbb{F}_p) \simeq H^2(\Sigma, \mathbb{F}_p) \simeq \mathbb{F}_p\,.$$

Isto mostra que $\dim_{\mathbb{F}_p} H^2(G) = 1$, como desejado. Note que para Σ não-orientável e p ímpar, temos $H^2(\Sigma, \mathbb{F}_p) = 0$ (*cf.* [Bre93, Cor. VI.7.12]) e portanto G é pro-p livre.

O invariante d de G é igual a $2g$ se Σ for orientável ou igual a g se Σ for não orientável. Como $G^{\mathrm{ab}} \simeq \widehat{(\Gamma^{\mathrm{ab}})}_p$, pelas apresentações (V) podemos concluir que o invariante $q(G)$ é 0 ou 2 dependendo se Σ é novamente orientável ou não. ■

2.2 O invariante χ

Se G é um grupo de Dëmushkin infinito, então G satisfaz a dualidade de Poincaré em dimensão 2. Em particular, existe um G-módulo especial I, chamado módulo dualizante, para o qual temos isomorfismos naturais

$$H^2(G, A)^\vee = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(H^2(G, A), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \simeq \mathrm{Hom}_G(A, I)$$

para todo G-módulo de torção A. O G-módulo I é isomorfo a $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$ como grupo abeliano (Proposição 1.3.9), e portanto $\mathrm{Aut}_{\mathbb{Z}}(I) \simeq \mathbb{Z}_p^\times$.

Definição 2.2.1. O homomorfismo contínuo $\chi_G\colon G \to \mathbb{Z}_p^\times$ definido pela ação de G sobre I é chamado de *invariante ciclotômico* de G. Quando o grupo G estiver claro pelo contexto, escreveremos apenas χ para χ_G.

A definição do invariante χ se mostra, em um primeiro momento, menos fértil para cálculos e descrições do que os invariantes numéricos d e q. Entretanto, para grupos de Dëmushkin, temos uma descrição alternativa para o invariante ciclotômico que é bem mais acessível: é a única ação contínua de G sobre $\mathbb{Z}_p$ para a qual podemos definir arbitrariamente homomorfismos cruzados de G em $\mathbb{Z}_p$ a partir de um sistema minimal de geradores para G, como será feito na Proposição 2.2.2 abaixo. Uma consequência dessa proposição é que o invariante q pode ser recuperado do invariante χ, pois $q = q(G)$ é a maior potência de p tal que $\mathrm{Im}(\chi) \subseteq 1 + q\mathbb{Z}_p$. Além disso, com essa descrição, podemos derivar uma fórmula para o invariante ciclotômico de cada exemplo da Seção 2.1.

Proposição 2.2.2 ([Lab67, Prop. 6 e Teo. 4])**.** *Seja G um grupo pro-p topologicamente finitamente gerado. Dado um homomorfismo contínuo $\chi\colon G \to \mathbb{Z}_p^\times$, defina $J = \mathbb{Z}_p$ como grupo abeliano e conceda a ele uma estrutura de G-módulo através de χ. Então, são equivalentes para χ:*

(a) *Para todo $i \geq 1$, o homomorfismo canônico $H^1(G, J/p^iJ) \to H^1(G, J/pJ)$ é sobrejetivo;*

(b) *Para todo $i \geq 1$, podemos arbitrariamente definir homomorfismos cruzados de G em J/p^iJ a partir de um sistema minimal de geradores de G;*

(c) *Podemos arbitrariamente definir homomorfismos cruzados de G em J a partir de um sistema minimal de geradores de G.*

Se G for pro-p livre, então todo homomorfismo contínuo χ possui as três propriedades acima. Se G for um grupo de Dëmushkin infinito e χ_G for seu invariante ciclotômico, as propriedades acima são equivalentes a:

(d) $\chi = \chi_G$.

Demonstração. (a) segue trivialmente de (c) e, uma vez que $J = \varprojlim J/p^iJ$ como G-módulos, temos que (b) implica (c). Assim, basta provarmos (a) $\implies$ (b), o que faremos por indução sobre i.

Uma vez que G age trivialmente sobre $J/pJ \simeq \mathbb{F}_p$ para qualquer função contínua χ, ambas as afirmações (a) e (b) são verdadeiras para $i = 1$. Agora, sejam $g_1, \cdots, g_d$ um sistema minimal de geradores topológicos de G e escolha $a_1, \cdots, a_d$ elementos arbitrários de J/p^iJ com $i > 1$. Utilizando a hipótese de indução e (b), podemos encontrar um homomorfismo cruzado $d_1\colon G \to J/pJ$ tal que $d_1(g_i) \equiv a_i \pmod p$, e por (a) podemos levantá-lo a um homomorfismo cruzado $D_1\colon G \to J/p^iJ$. Como $D_1(g_i) \equiv a_i \pmod p$ e podemos identificar $p(J/p^iJ) \simeq J/p^{i-1}J$, existem elementos $b_i \in J/p^{i-1}J$ tais que $pb_i = D_1(g_i) - a_i$. Novamente, pela hipótese de indução e (b), existe um homomorfismo cruzado $d_2\colon G \to J/p^{i-1}J$ tal que $d_2(g_i) = b_i$. Temos que $D_2 = pd_2$ é um homomorfismo cruzado de G em J/p^iJ, e assim $D = D_1 - D_2$ é o homomorfismo cruzado desejado.

Se G é um grupo pro-p livre, a sequência exata curta de G-módulos

$$0 \to J/p^{i-1}J \xrightarrow{\cdot p} J/p^iJ \to J/pJ \to 0$$

induz a sequência exata longa

$$\cdots \to H^1(G, J/p^iJ) \to H^1(G, J/pJ) \to H^2(G, J/p^{i-1}J) = 0$$

e portanto qualquer função contínua χ possui a propriedade (a).

Suponha agora que G seja um grupo de Dëmushkin infinito e seja I seu módulo dualizante em dimensão 2. Temos que (d) é equivalente a

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(J/p^iJ, I) \simeq \mathrm{Hom}_G(J/p^iJ, I)\,, \quad \forall i \geq 1\,.$$

De fato, supondo (d), para todo $g \in G$ sempre podemos escrever $\chi(g) = \chi_G(g) = z_g + p^i\alpha_g$ com $\alpha_g \in \mathbb{Z}_p^\times$ e z_g um representante de $\chi(g)$ dentro de um conjunto completo de representantes de J/p^iJ fixado. Assim, para toda $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(J/p^iJ, I)$ e todo $a \in J/p^iJ$, temos que

$$\begin{aligned}
f(\chi(g)a) &= f(z_ga + p^i\alpha_ga) \\
&= f(z_ga) \\
&= z_gf(a) \\
&= z_gf(a) + p^i\alpha_gf(a)\,, \text{ pois } p^if(J/p^iJ) = 0 \\
&= (z_g + p^i\alpha_g)f(a) \\
&= \chi_G(g)f(a)\,.
\end{aligned}$$

((d) $\implies$ (a)) Consideremos novamente a sequência exata de G-módulos

$$0 \to J/p^{i-1}J \to J/p^iJ \to J/pJ \to 0$$

que induz a sequência exata longa:

$$\cdots \to H^1(G, J/p^iJ) \to H^1(G, J/pJ) \to H^2(G, J/p^{i-1}J) \to H^2(G, J/p^iJ) \to \cdots$$

Para mostrarmos que o primeiro mapa é sobrejetivo, basta mostrarmos que $H^2(G, J/p^{i-1}J) \to H^2(G, J/p^iJ)$ é injetivo. Porém, pela definição do módulo dualizante, isto é equivalente a

$$\mathrm{Hom}_G(J/p^iJ, I) \to \mathrm{Hom}_G(J/p^{i-1}J, I)$$

ser sobrejetiva. Isto é verdade uma vez que I é injetivo na categoria de todos os grupos abelianos p-primários.

((a) $\implies$ (d)) Vamos mostrar que $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(J/p^iJ, I) \simeq \mathrm{Hom}_G(J/p^iJ, I)$ por indução sobre i. Como $\mathrm{cd}(G) = 2$ e $H^1(G, J/p^iJ) \to H^1(G, J/pJ)$ é sobrejetiva por hipótese, temos uma sequência exata curta

$$0 \to H^2(G, J/p^{i-1}J) \to H^2(G, J/p^iJ) \to H^2(G, J/pJ) \to 0$$

que, pela definição de I, nos fornece o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_G(J/pJ, I) \arrow[r] \arrow[d, hook] & \mathrm{Hom}_G(J/p^iJ, I) \arrow[r] \arrow[d, hook] & \mathrm{Hom}_G(J/p^{i-1}J, I) \arrow[r] \arrow[d, hook] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(J/pJ, I) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(J/p^iJ, I) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(J/p^{i-1}J, I) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Utilizando a hipótese de indução, o resultado sai diretamente pelo Lema dos Cinco. □

Como afirmado em [Ser64, Sec. 9], o invariante χ permite então que recuperemos informações acerca do invariante numérico q, e além disso:

Proposição 2.2.3. *O invariante q de um grupo de Dëmushkin é a maior potência de p tal que* $\mathrm{Im}(\chi) \subseteq 1 + q\mathbb{Z}_p$.

Demonstração. Suponha que $\mathrm{Im}(\chi) \subseteq 1 + p^f\mathbb{Z}_p$, e faça G agir sobre $\mathbb{Z}/p^f\mathbb{Z}$ por meio de χ. Como a ação é trivial, temos por um lado

$$|H^1(G, \mathbb{Z}/p^f\mathbb{Z})| = |\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(G^{\mathrm{ab}}, \mathbb{Z}/p^f\mathbb{Z})| = m_f \cdot p^{f(d-1)}$$

onde $m_f = \mathrm{mdc}\{q, p^f\}$. Por outro lado, a Proposição 2.2.2 garante que homomorfismos cruzados de G em $\mathbb{Z}/p^f\mathbb{Z}$ podem ser arbitrariamente definidos a partir dos d geradores de G, e portanto $|H^1(G, \mathbb{Z}/p^f\mathbb{Z})| = p^{fd}$. Com isto, podemos concluir que $m_f = p^f$ e, portanto, p^f divide q. □

Exemplo 2.2.4. Seja G o grupo de Dëmushkin dado pelo Exemplo 2.1.8, isto é, G é dado por uma apresentação

$$G \simeq \langle x, y \mid xyx^{-1} = y^z \rangle = \langle x, y \mid y^{-q\alpha}[x, y] = 1 \rangle,$$

onde $\alpha \in \mathbb{Z}_p^\times$, $q > 1$ é uma potência de p e $z = 1 + q\alpha$. Fazendo uso da Proposição 2.2.2 iremos estudar o invariante χ_G.

Para isso, nós utilizaremos da Proposição 2.2.2. Tomemos dois homomorfismos cruzados contínuos D_x e D_y de G em J que são levantamentos de η_x e η_y (os duais de x e y em $H^1(G)$) respectivamente. Indução sobre n e aplicações repetidas da definição de homomorfismos cruzados nos fornecem as igualdades $D_x(y^n) = 0$, $D_y(y^n) = 1 + \chi_G(y) + \cdots + \chi_G(y)^{n-1}$, $D_x([x,y]) = 1 - \chi_G(y)$ e $D_y([x,y]) = \chi_G(x) - 1$.

Assim, como $y^{-q\alpha}[x,y] = 1$ em G, temos:

$$\begin{aligned} 0 = D_x(y^{-q\alpha}[x,y]) &= D_x(y^{-q\alpha}) + \chi_G(y)^{-q\alpha} D_x([x,y]) \\ &= \chi_G(y)^{-q\alpha}(1 - \chi_G(y))\,, \end{aligned}$$

de onde podemos concluir que $\chi_G(y) = 1$ e, portanto, que $D_y(y^m) = m$ para todo $m \in \mathbb{Z}_p$, e

$$\begin{aligned} 0 = D_y(y^{-q\alpha}[x,y]) &= D_y(y^{-q\alpha}) + \chi_G(y)^{-q\alpha} D_y([x,y]) \\ &= -q\alpha + \chi_G(x) - 1\,, \end{aligned}$$

de tal forma que obtemos $\chi_G(x) = 1 + q\alpha = z$.

Deste modo, obtemos uma fórmula para $\chi_G\colon G \to \mathbb{Z}_p^\times$ em função dos geradores x e y. Note que $y \in \mathrm{Ker}(\chi_G)$. Pelo Corolário 1.3.10, podemos também concluir que $\mathrm{scd}(G) = 2$ salvo o caso $p = q = 2$ e $\alpha = -1$. Nele, temos que $z = -1$ e portanto que $\mathrm{Im}(\chi_G) = \{\pm 1\}$, de onde segue que $\mathrm{scd}(G) = 3$. ■

Exemplo 2.2.5. No Exemplo 2.1.9, mostramos que o subgrupo p-Sylow G do grupo de transformações afins $\mathrm{Aff}(\mathbb{Z}_p)$ é dado pela apresentação

$$G \simeq \langle x, y \mid xyx^{-1} = y^{1+p} \rangle = \langle x, y \mid y^{-p}[x,y] = 1 \rangle$$

no caso em que $p \neq 2$. Em virtude do cálculo realizado no Exemplo 2.2.4, sabemos que a imagem do invariante ciclotômico χ_G inclui o subgrupo multiplicativo fechado topologicamente gerado por $1 + p$, e, portanto, é infinita. Logo, $\mathrm{scd}(G) = \mathrm{scd}_p(G)(\mathrm{Aff}(\mathbb{Z}_p)) = 2$. ■

Exemplo 2.2.6. Como no Exemplo 2.1.12, seja $\Gamma = \pi_1(\Sigma)$ o grupo fundamental de uma superfície compacta Σ de gênero g, onde $g \geq 1$ se Σ for orientável ou $g \geq 2$ caso contrário. Então, o completamento pro-p $G = \widehat{\Gamma}_p$ de Γ é um grupo de Dëmushkin se p = 2 ou se Σ for orientável. A mesma técnica utilizada no Exemplo 2.2.4 nos fornece que, caso Σ seja orientável, χ_G é trivial, e, caso Σ seja não-orientável, $\chi_G(x_1) = -1$ e $\chi_G(x_i) = 1$ para todo $i > 1$. Em ambos os casos, temos $\mathrm{scd}(G) = 3$ pelo Corolário 1.3.10. Resumimos estes invariantes na Tabela 2.2. ■

Exemplo 2.2.7 ([Ser64, Teo. 4.2])**.** Sejam K uma extensão finita de grau n do corpo de números p-ádicos $\mathbb{Q}_p$, $K(p)$ a p-extensão galoisiana maximal de K, isto é, o grupo de Galois $G = \mathrm{Gal}(K(p)/K)$ é o quociente pro-p maximal do grupo de Galois absoluto de K. Seja q a maior potência de p tal que o corpo K contenha todas as raízes q-ésimas da unidade. Se $q = 1$, um teorema de Shafarevitch [Sha47] ([Ser97, Teo. II.3]) garante que G é pro-p livre sobre

Invariante	Σ orientável	Σ não-orientável
$d(G)$	$2g$	g
$q(G)$	0	2
$\mathrm{Im}(\chi_G)$	$\{1\}$	$\{\pm 1\}$

Tabela 2.2 Invariantes associados ao completamento pro-p de grupos de superfícies.

$n+1$ geradores. Se $q \neq 1$, então G é um grupo de Dëmushkin com $d(G) = n+2$ e $q(G) = q$ [Ser97, Teo. II.4]. Além disto, se $q \neq 1$, então o módulo dualizante I de G é isomorfo, como G-módulo discreto, ao G-módulo discreto μ formado por todas as raízes da unidade no fecho algébrico de $K(p)$ por [Ser97, Teo. II.1]. Em particular, o invariante ciclotômico χ_G é dado pela ação de G sobre as raízes p^f-ésimas da unidade no fecho algébrico de $K(p)$. ■

2.3 Classificação dos grupos de Dëmushkin

Seja G um grupo de Dëmushkin infinito. Nas duas seções anteriores, definimos seus invariantes $d(G)$, $q(G)$ e χ_G. Pela Proposição 2.2.3, sabemos que a informação do invariante $q(G)$ está codificada no invariante χ_G como a maior potência de p tal que $\mathrm{Im}(\chi_G) \subseteq 1 + q(G)\mathbb{Z}_p$. Como veremos nesta seção (Corolário 2.3.12), estes invariantes determinam completamente o grupo G a menos de isomorfismo. Ainda mais, podemos separar o invariante algébrico χ_G em dois invariantes numéricos $f(G)$ e $a(G)$, determinados pela imagem $\mathrm{Im}(\chi_G)$, de tal forma que d, q, f e a formam um conjunto de invariantes numéricos que determinam G a menos de isomorfismo.

No Corolário 2.3.14, determinaremos a imagem de χ_G. No caso $q(G) \neq 2$, os invariantes d e q determinam G, dado que $\mathrm{Im}(\chi) = 1 + q\mathbb{Z}_p$ (caso (1) do Teorema 2.3.9). Se $q(G) = 2$ e $d(G)$ é ímpar, temos que $\mathrm{Im}(\chi) = \{\pm 1\} \times \mathbb{U}_2^{(f)}$ para algum $f \geq 2$, possivelmente infinito (caso (2) do Teorema 2.3.9). Neste caso, os invariantes d, q e f determinam unicamente o grupo G a menos de isomorfismo. Por fim, se $d(G)$ é par (caso (3) do Teorema 2.3.9), definimos

$$a(G) = [\mathrm{Im}(\chi) \colon \mathrm{Im}(\chi)^2] .$$

Se $a = 2$ (caso (3.A) do Teorema 2.3.11), temos $\mathrm{Im}(\chi) = \mathbb{U}_2^{[f]}$, e se $a = 4$ (caso (3.B) do Teorema 2.3.11), temos $\mathrm{Im}(\chi) = \{\pm 1\} \times \mathbb{U}_2^{(f)}$, ambos pelo Corolário 2.3.14. Em ambos os casos, temos que d, q, f e a determinam G a menos de isomorfismo.

Estas afirmações serão demonstradas através da derivação de uma apresentação pro-p para G dada em função destes invariantes d, q e χ. Conectaremos as apresentações pro-p de G com o produto cup na cohomologia através de bases simpléticas na Seção 2.3.1, e estudaremos seu comportamento sob mudanças de base através dos sucessivos quocientes da série q-central na Seção 2.3.2. Na Seção 2.3.3, enunciamos e demonstramos o Teorema de Classificação (Teorema 2.3.9) dado em [Lab67, Teo. 3], e exploramos sua conexão com o invariante ciclotômico χ_G na Seção 2.3.4. A referência que seguiremos é [Lab67].

2.3.1 Formas simpléticas em grupos de Dëmushkin

Seja G grupo de Dëmushkin pro-p com invariantes $d(G) = n$ e $q(G) = q$. Sejam $R = \mathbb{Z}_p/q\mathbb{Z}_p$ e $\kappa = \mathbb{F}_p$. Consideremos a série q-central de $F = F(n)$ o grupo pro-p livre em n geradores:

$$F_1 = F\,, \quad F_{k+1} = \overline{F_k^q[F_k, F]} \quad (k \geq 1)\,.$$

Temos que $F_{k+1} \trianglelefteq_c F_k$, e cada quociente F_k/F_{k+1} é um R-módulo livre de posto finito. Além disso, nos sucessivos quocientes F_1/F_k temos que os comutadores de ordem $k-2$ são centrais, assim como as q^{k-2} potências.

Escrevamos $G = F/L$ com L o subgrupo fechado normal de F gerado por um elemento $r \in F_2$. Se $q \neq 0$, então existe $s \in F$ tal que $s^q \equiv r \pmod{[F,F]}$. Denotando por $\varepsilon\colon F \to G$ o quociente canônico, defina $\sigma = \varepsilon(s) \in G$.

Lema 2.3.1. *O elemento s é único módulo $[F,F]$, e para todo $\eta \in H^1(G,R)$ o valor $\eta(\sigma)$ não depende da escolha de s.*

Demonstração. Seja $s' \in F$ tal que $s'^q \equiv r \pmod{[F,F]}$. Então, módulo $[F,F]$, temos a igualdade $s'^q \equiv s^q$, de onde segue que $(s's^{-1})^q \equiv 1$. Logo, $s' \equiv s$, pois $F/[F,F] \simeq \mathbb{Z}_p^n$ é livre-de-torção. Assim, fazendo $\sigma' = \varepsilon(s')$, temos que $\sigma'\sigma^{-1} \in [G,G]$. Como G age trivialmente sobre R, vale que $[G,G] \in \mathrm{Ker}(\eta)$, de onde podemos concluir que $\eta(\sigma) = \eta(\sigma')$. $\square$

Relembremos a técnica da Construção 2.1.7 para o cálculo do produto cup: identifiquemos $H^2(G,R)$ com R através da transgressão $H^1(L,R)^F \to H^2(G,R)$ e escolhamos r^{-1} como o gerador topológico de L como subgrupo fechado normal; a escolha do inverso de r como gerador nos fornecerá a relação na ordem crescente das variáveis mais adiante. Notemos que um elemento de $H^1(L,R)^F$ é unicamente definido pelo seu valor em r^{-1}, e portanto $H^1(L,R)^F \simeq R$ através do isomorfismo $\psi \mapsto \psi(r^{-1})$. Logo, o isomorfismo $\overline{r}$ que leva $H^2(G,R)$ em R é dado por

$$\overline{r}(\theta) = \mathrm{tr}^{-1}\,\theta(r^{-1})\,.$$

Como o produto cup é não degenerado, a composição com $\overline{r}$ define uma forma simplética sobre R. Para uma classe $\theta \in H^2(G,R)$, tomemos $c = \inf_G^F \theta$. Como $H^2(F,R) = 0$, temos que existe $u \in C^1(F,R)$ tal que $du = c$. Fixada uma base $x_1, \cdots, x_n$ de F, podemos subtrair de u os elementos duais de x_i em $H^1(F,R)$ para sempre garantirmos que nossa escolha de u satisfaça $u(x_i) = 0$ para todo $1 \leq i \leq n$. Observemos que $u(r^{-1}) = \overline{r}(\theta)$.

Agora, notemos que sempre podemos encontrar únicos coeficientes a_i e a_{ij} em R para escrevermos r em função de base $x_1, \cdots, x_n$ de F:

$$r \equiv \prod_{i=1}^{n} x_i^{qa_i} \prod_{1 \leq i < j \leq n} [x_i, x_j]^{a_{ij}} \pmod{F_3}.$$

Notemos que $\sigma \equiv x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n} \pmod{[F, F]}$.

Lema 2.3.2. *Seja $\chi_1, \cdots, \chi_n$ a base dual de $x_1, \cdots, x_n$ em $H^1(F, R) \simeq H^1(G, R)$. Então, temos:*

$$\overline{r}(\chi_i \cup \chi_j) = \begin{cases} a_{ij}, \text{ se } i < j\,, \\ -a_{ji}, \text{ se } i > j\,, \\ \binom{q}{2} a_i, \text{ se } i = j\,. \end{cases}$$

Demonstração. Para $\theta = \chi_i \cup \chi_j$, tomemos $u \in C^1(F, R)$ como construído acima, de forma que $u(r^{-1}) = \overline{r}(\chi_i \cup \chi_j)$. Recordemos que

$$u(xy) = u(x) + u(y) - \chi_i(x)\chi_j(y) \quad \forall x, y \in F\,.$$

Desta igualdade segue que $u(1) = 0$ e que $u(x_h^{-1}) = -\chi_i(x_h)\chi_j(x_h)$ para todo $1 \leq h \leq n$. Além disso, se $c \in C^2(F, R)$ representa $\inf_G^F \chi_i \cup \chi_j$, temos que c é identicamente nula em $F_2 \times F_2$; de fato, basta verificar a nulidade nos geradores pois c possui um comportamento "bilinear" herdado do produto cup. Assim, $\operatorname{res}_{F_2}^F u$ é um homomorfismo que se fatora por F_2/F_3. Agora, calculemos, primeiramente para $h < k$:

$$\begin{aligned}
u([x_h, x_k]) &= u(x_h x_k x_h^{-1} x_k^{-1}) \\
&= u(x_h) + u(x_k x_h^{-1} x_k^{-1}) - \chi_i(x_h)\chi_j(x_k x_h^{-1} x_k^{-1}) \\
&= u(x_k x_h^{-1} x_k^{-1}) + \chi_i(x_h)\chi_j(x_h) \\
&= u(x_k) + u(x_h^{-1} x_k^{-1}) - \chi_i(x_k)\chi_j(x_h^{-1} x_k^{-1}) + \chi_i(x_h)\chi_j(x_h) \\
&= u(x_h^{-1} x_k^{-1}) + \chi_i(x_k)\chi_j(x_h) + \chi_i(x_k)\chi_j(x_k) + \chi_i(x_h)\chi_j(x_h) \\
&= u(x_h^{-1}) + u(x_k^{-1}) - \chi_i(x_h^{-1})\chi_j(x_k^{-1}) \\
&\quad + \chi_i(x_k)\chi_j(x_h) + \chi_i(x_k)\chi_j(x_k) + \chi_i(x_h)\chi_j(x_h) \\
&= \delta_{ik}\delta_{jh} - \delta_{ih}\delta_{jk} \\
&= \begin{cases} -1, \text{ se } i = h \text{ e } j = k\,, \\ 1, \text{ se } i = k \text{ e } j = h\,, \\ 0, \text{ caso contrário.} \end{cases}
\end{aligned}$$

Agora, se $i \neq j$, temos $u(x_h^m) = 0$ para todo $m \in \mathbb{Z}$. Por outro lado, se $i = j$, obtemos:

$$u(x_h^{m+1}) = u(x_h^m) - \chi_i(x_h^m)\chi_i(x_h) = u(x_h^m) - m\delta_{ih}\,.$$

Por indução sobre m, mostra-se que

$$u(x_h^m) = -\binom{m}{2}\delta_{ih} \quad m \geq 1\,.$$

Assim, o resultado segue da linearidade de u em F_2/F_3. □

Lema 2.3.3. *Se $q \neq 0$, então existe um elemento $\chi_\sigma \in H^1(G,R)$ tal que para todo $\eta \in H^1(G,R)$ tem-se $\overline{r}(\eta \cup \chi_\sigma) = \eta(\sigma)$. Além disso, para todo $\eta \in H^1(G,R)$ tem-se*

$$\overline{r}(\eta \cup \eta) = \binom{q}{2}\eta(\sigma)\,.$$

Demonstração. Fixemos uma base $x_1, \cdots, x_n$ de F e tomemos a base dual $\chi_1, \cdots, \chi_n$ em $H^1(F,R)$ levantada da mesma em $H^1(G,R)$. Suponhamos que exista χ_σ com tal propriedade, e escrevamos $\chi_\sigma = \sum_{i=1}^n b_i\chi_i$. Assim, o Lema 2.3.2 nos fornece para todo $1 \leq i \leq n$ a igualdade:

$$-\sum_{j=1}^{i-1} b_j a_{ji} + \binom{q}{2} b_i a_i + \sum_{j=i+1}^{n} b_j a_{ij} = \overline{r}(\chi_i \cup \chi_\sigma) = \chi_i(\sigma) = a_i$$

As n equações acima definem um sistema linear sobre R nas variáveis b_j. Este sistema linear sempre possui única solução já que o produto cup é uma forma simplética e portanto não degenerada; tal solução nos fornece o χ_σ desejado pela linearidade de $\overline{r}$.

Escrevendo $\eta = \sum_{i=1}^n c_i\chi_i$, obtemos

$$\overline{r}(\eta \cup \eta) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} c_i c_j \overline{r}(\chi_i \cup \chi_j) = \sum_{i=1}^{n} c_i^2 \binom{q}{2} a_i = \sum_{i=1}^{n} c_i \binom{q}{2} a_i = \binom{q}{2}\eta(\sigma)\,,$$

pois a penúltima igualdade segue de $c_i^2\binom{q}{2} \equiv c_i\binom{q}{2} \pmod{q}$. □

Utilizando agora as ferramentas de álgebra linear apresentadas na Seção A.1, obtemos:

Proposição 2.3.4. *Existe uma base $\chi_1, \cdots, \chi_n$ de $H^1(G,R)$ tal que:*

(I) *Se $q \neq 2$, então n é par e $\{\chi_i \mid 1 \leq i \leq n\}$ é uma base simplética de $H^1(G,R)$. Se $q \neq 0$, então podemos assumir que $\chi_i(\sigma) = \delta_{1i}$.*

(II) *Se $q = 2$ e n for par, então $\{\chi_i \mid 1 \leq i \leq n\}$ é uma base simplética de $H^1(G,R)$ e $\chi_i(\sigma) = \delta_{1i}$.*

(III) *Se $q = 2$ e n for ímpar, então $\overline{r}(\chi_1 \cup \chi_i) = \delta_{1i} = \chi_i(\sigma)$ e $\{\chi_i \mid 2 \leq i \leq n\}$ é uma base simplética de $\langle \chi_1 \rangle^\perp$ em $H^1(G, R)$.*

Demonstração. Se $q = 0$, então a afirmação segue do Lema A.1.7 e do Teorema A.1.8. Se $q \notin \{0, 2\}$, temos que a aplicação $\eta \mapsto \eta(\sigma)$ é um funcional em $H^1(G, R)$ e σ pode ser completado a uma base de $G/\Phi(G)$, e portanto o Lema A.1.7 e o Corolário A.1.6 garantem a existência da base desejada.

Se $q = 2$, temos que $\overline{r}$ não é alternada, pois σ é não-trivial e portanto devemos ter $\overline{r}(\eta \cup \eta) = \eta(\sigma) \neq 0$ para algum $\eta \in H^1(G, R)$ pelo Lema 2.3.3. Assim, o Teorema A.1.8 garante a existência de uma base χ_i tal que $\overline{r}(\chi_1 \cup \chi_i) = \delta_{1i} = \overline{r}(\chi_i \cup \chi_i)$, de onde segue que $\chi_i(\sigma) = \delta_{1i}$ pelo Lema 2.3.3. □

Corolário 2.3.5. *Suponhamos que $q \neq 0$ e seja $\chi_1, \cdots, \chi_n$ a base dada pela Proposição 2.3.4 e χ_σ o elemento do Lema 2.3.3. Temos assim:*

$$\chi_\sigma = \begin{cases} \chi_2, & \text{se } n \text{ for par,} \\ \chi_1, & \text{se } n \text{ for ímpar.} \end{cases}$$

Demonstração. Fazendo $\chi_\sigma = \sum_{i=j}^{n} b_j \chi_j$ e tomando o produto cup com χ_{2t-1} e χ_{2t} para n par e $1 \leq t \leq \frac{n}{2}$ obtemos

$$\begin{pmatrix} \delta_{1t} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \chi_{2t-1}(\sigma) \\ \chi_{2t}(\sigma) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \binom{q}{2}\delta_{1t} & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{2t-1} \\ b_{2t} \end{pmatrix},$$

de onde concluímos que $b_2 = 1$ e $b_i = 0$ para $i \neq 2$, ou seja, $\chi_\sigma = \chi_2$. Para n ímpar e o produto cup com χ_{2t} e χ_{2t+1} onde $1 \leq t \leq \frac{n-1}{2}$, obtemos

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \chi_{2t}(\sigma) \\ \chi_{2t+1}(\sigma) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{2t} \\ b_{2t+1} \end{pmatrix}$$

e $b_1 = \overline{r}(\chi_1 \cup \chi_\sigma) = \chi_1(\sigma) = 1$, ou seja, $\chi_\sigma = \chi_1$. □

Tal base simplética nos fornece a seguinte proposição:

Proposição 2.3.6. *Existe uma base $x_1, \cdots, x_n$ de F tal que*

$$r \equiv \begin{cases} x_1^q [x_1, x_2] \cdots [x_{n-1}, x_n] \pmod{F_3}, & \text{se } n \text{ for par,} \\ x_1^q [x_2, x_3] \cdots [x_{n-1}, x_n] \pmod{F_3}, & \text{se } n \text{ for ímpar.} \end{cases}$$

Demonstração. Tomemos $\chi_1, \cdots, \chi_n$ uma base de $H^1(G, R)$ como dada pela Proposição 2.3.4, e sejam $x_1, \cdots, x_n$ levantamentos para F da base dual em G. Denotando por a_i e

a_{ij} os coeficientes do Lema 2.3.2, por um lado temos que

$$x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n} \equiv \sigma \pmod{[F,F]}\,.$$

Por outro lado, como $\{x_i\}$ é a base dual de $\{\chi_i\}$, pelo Lema 2.3.1 podemos calcular

$$\delta_{1i} = \chi_i(\sigma) = \chi_i(x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n}) = a_i\,,$$

e, portanto, $\sigma = x_1$. Os coeficientes a_{ij} dos comutadores são então dados pelo Lema 2.3.2 notando que $\{x_1, \cdots, x_n\}$ (resp. $\{x_2, \cdots, x_n\}$) é uma base simplética de $H^1(G,R)$ se n for par (respectivamente, ímpar). □

2.3.2 Correções pela série q-central

A Proposição 2.3.6 nos fornece um conjunto gerador $x_1, \cdots, x_n$ e uma forma aproximada para a relação que define um dado grupo de Dëmushkin G. Uma vez que esta forma envolve apenas q-potências e comutadores e $\bigcap_{k\geq 1} F_k = \{1\}$, se conseguirmos "corrigir" os elementos x_i da base por elementos $t_i \in F_k$ em índices k sucessivos de modo que a forma da relação fosse preservada módulo $F_{k+1} = F_k^q[F_k, F]$, obteremos uma base que satisfaz *bona fide* a relação dada.

Esta foi a estratégia adotada em [Lab67] para classificar as apresentações dos grupos de Dëmushkin, a qual apresentaremos a seguir. Para isto, precisamos entender como esta relação se comporta sob estas correções. O principal resultado desta seção é o Lema 2.3.8, que será utilizado na classificação das apresentações dos grupos de Dëmushkin para controlar o efeito da correção ao longo da série q-central.

Definamos a função $r_o \colon F \times \cdots \times F \to F$ por

$$r_0(w_1, \cdots, w_n) \mapsto \begin{cases} w_1^q[w_1, w_2] \cdots [w_{n-1}, w_n], \text{ se } n \text{ for par,} \\ w_1^q[w_2, w_3] \cdots [w_{n-1}, w_n], \text{ se } n \text{ for ímpar.} \end{cases}$$

Assim:

Proposição 2.3.7. *Sejam $x_1, \cdots, x_n$ uma base de F e $t_1, \cdots, t_n \in F_{k-1}$ ($k \geq 3$) e tome $y_i = t_i^{-1}x_i$. Então, $y_1, \cdots, y_n$ ainda é uma base de F. A imagem destas através de r_0 satisfaz*

$$r_0(x_1, \cdots, x_n) \equiv d_{k-1}(t_1, \cdots, t_n, x_1, \cdots, x_n) r_0(y_1, \cdots, y_n) \pmod{F_{k+1}}$$

onde d_{k-1} é dada por:

$$d_{k-1} \equiv \begin{cases} [x_1,t_1]^{\binom{q}{2}} t_1^q \prod_{k=1}^{n/2} [t_{2k-1},x_{2k}]\,[x_{2k-1},t_{2k}]\,, \text{ se } n \text{ for par,} \\ [x_1,t_1] t_1^q \prod_{k=1}^{(n-1)/2} [t_{2k},x_{2k+1}]\,[x_{2k},t_{2k+1}]\,, \text{ se } n \text{ for ímpar.} \end{cases} \pmod{F_{k+1}}.$$

Em particular, para cada base $x_1, \cdots, x_n$, a fórmula de d_{k-1} define um homomorfismo:

$$d_{k-1} \colon F_{k-1}/F_k \times \cdots \times F_{k-1}/F_k \to F_k/F_{k+1}\,.$$

Demonstração. Temos que os elementos $y_1, \cdots, y_n$ ainda formam uma base de F pois formam uma base de $F/\Phi(F)$. Uma vez que em F/F_{k+1} vale a identidade $(ab)^q = [b,a]^{\binom{q}{2}} a^q b^q$ para todo $a \in F_{k-1}$ (pois $[F_{k-1},F]$ é central em F/F_{k+1}) temos as seguintes igualdades para a imagem de y através de r_0.

Se n for par:

$$\begin{aligned} r_0(y_1,\cdots,y_n) &= r_0(t_1^{-1}x_1,\cdots,t_n^{-1}x_n) \\ &= (t_1^{-1}x_1)^q \prod_{k=1}^{n/2} \left[t_{2k-1}^{-1}x_{2k-1}, t_{2k}^{-1}x_{2k}\right] \\ &\equiv [x_1,t_1^{-1}]^{\binom{q}{2}} t_1^{-q} x_1^q \prod_{k=1}^{n/2} \left[t_{2k-1}^{-1},x_{2k}\right] \left[x_{2k-1},t_{2k}^{-1}\right] [x_{2k-1},x_{2k}] \pmod{F_{k+1}} \end{aligned}$$

e, deste modo, obtemos:

$$r_0(x_1,\cdots,x_n) \equiv [x_1,t_1]^{\binom{q}{2}} t_1^q \prod_{k=1}^{n/2} [t_{2k-1},x_{2k}]\,[x_{2k-1},t_{2k}]\, r_0(y_1,\cdots,y_n) \pmod{F_{k+1}}$$

Se n for ímpar e portanto $q=2$:

$$\begin{aligned} r_0(y_1,\cdots,y_n) &= r_0(t_1^{-1}x_1,\cdots,t_n^{-1}x_n) \\ &= (t_1^{-1}x_1)^q \prod_{k=1}^{(n-1)/2} \left[t_{2k}^{-1}x_{2k}, t_{2k+1}^{-1}x_{2k+1}\right] \\ &\equiv [x_1,t_1^{-1}] t_1^{-q} x_1^q \prod_{k=1}^{(n-1)/2} \left[t_{2k}^{-1},x_{2k+1}\right] \left[x_{2k},t_{2k+1}^{-1}\right] [x_{2k},x_{2k+1}] \pmod{F_{k+1}} \end{aligned}$$

e logo:

$$r_0(x_1,\cdots,x_n) \equiv [x_1,t_1] t_1^q \prod_{k=1}^{(n-1)/2} [t_{2k},x_{2k+1}]\,[x_{2k},t_{2k+1}]\, r_0(y_1,\cdots,y_n) \pmod{F_{k+1}}$$

Para uma base $x_1, \cdots, x_n$ fixa, a fórmula de d_{k-1} define um homomorfismo de n cópias de F_{k-1} em F_k/F_{k+1} pois as q-potências e comutadores dos t_i são centrais em F_k/F_{k+1}, nos fornecendo

$$[x_j, t_1t_1'] \equiv [x_j, t_1][x_j, t_1'] \text{ e } (t_1t_1')^q \equiv [t_1, t_1']^{\binom{q}{2}} t_1^q t_1'^q \equiv t_1^q t_1'^q \pmod{F_{k+1}}.$$

Da definição de F_{k+1}, vemos que $d_{k-1}(t_1, \cdots, t_n) \equiv 1$ se $t_i \in F_k$ para todo $1 \leq i \leq n$. $\square$

Lema 2.3.8. *Para todo $k \geq 3$ e uma base $x_1, \cdots, x_n$ de F fixa, temos que:*

$$F_k/F_{k+1} = \begin{cases} \mathrm{Im}(d_{k-1}), \text{ se } q \neq 2, \\ \left\langle \mathrm{Im}(d_{k-1}) \cup \{(x_i^{2^{k-1}} \bmod F_{k+1}) \mid \chi_i \neq \chi_\sigma\} \right\rangle, \text{ se } q = 2. \end{cases}$$

Demonstração. Como F_k/F_{k+1} é gerado pelas classes dos elementos t^q e $[t, x_i]$, onde t percorre os representantes de F_{k-1}/F_k e $1 \leq i \leq n$, basta mostrarmos que tais elementos pertencem aos conjuntos acima. Pelo Corolário 2.3.5, sabemos que χ_σ é χ_2 ou χ_1 dependendo se n é par ou ímpar respectivamente.

Fixemos $t \in F_{k-1}/F_k$ e consideremos o seguinte subgrupo H_k de F_k/F_{k+1}:

$$H_k = \begin{cases} \mathrm{Im}(d_{k-1}), \text{ se } q \neq 2, \\ \left\langle \mathrm{Im}(d_{k-1}) \cup \{(x_i^{2^{k-1}} \bmod F_{k+1}) \mid \chi_i \neq \chi_\sigma\} \right\rangle, \text{ se } q = 2. \end{cases}$$

Analisando a fórmula de d_{k-1} dada na Proposição 2.3.7 e fazendo $t_i \equiv \delta_{ij} t$ onde $1 \leq j \leq n$, podemos concluir que as classes dos seguintes elementos pertencem a $\mathrm{Im}(d_{k-1})$:

(i) $[t, x_i]$ para todo $i \geq 4$, além de $[t, x_3]$ se n for par, pelas substituições com $j \geq 4$.

(ii) $[t, x_2]$ se n for ímpar ou $[t, x_4]$ se n for par, pela substituição com $j = 3$.

(iii) $[t, x_3]$ se n for ímpar ou $[t, x_1]$ se n for par, pela substituição com $j = 2$.

(iv) $t^q[t, x_1]$ se n for ímpar ou $t^q[t, x_1]^{\binom{q}{2}}[t, x_2]$ se n for par, pela substituição com $j = 1$.

O ponto (iv) mostra que é suficiente então provarmos que $(t^q \bmod F_{k+1})$ pertence a H_k para todo $t \in F_{k-1}/F_k$. Esta condição é trivialmente satisfeita para $q = 0$, então basta provarmos a afirmação para $q \neq 0$. Iremos até o final da demonstração supor que $q \neq 0$ e prosseguiremos por indução sobre k. Para o passo base $k = 3$, dividimos a análise nos casos $q \neq 2$ e $q = 2$:

(Caso $q \neq 2$). Temos que F_2/F_3 é gerado pelas classes dos elementos x_i^q e $[x_i, x_j]$ para $1 \leq i < j \leq n$, e portanto iremos provar que as q potências destas classes pertencem a

$H_3\Phi(F_3/F_4)$. As identidades

$$[uv,w]=[u,w][[u,w],v][v,w] \quad \text{e} \quad [u,vw]=[u,w][u,v][[u,v],w]$$

nos fornecem as igualdades:

$$[x_i,x_j]^q \equiv [x_i^q,x_j]\,([[x_i,x_j],x_i])^{\binom{q}{2}} \equiv [x_i,x_j^q]\,([[x_i,x_j],x_j])^{\binom{q}{2}} \pmod{F_4}. \tag{2.5}$$

Por um lado, H_3 contém as classes de todos os elementos da forma $[x_i^q,x_j]$ para $1\leq i,j\leq n$ com $j\neq 2$. Por outro lado, para $j=2$ e $i\neq j$, temos que a classe de $[x_i,x_2^q]=[x_2^q,x_i]^{-1}$ pertence a H_3 uma vez que $x_2^q\in F_2$. Como $\binom{q}{2}$ é congruente a 0 ou a $\dfrac{q}{2}$ módulo q dependendo da paridade de q, as classes de ambos $([[x_i,x_j],x_i])^{\binom{q}{2}}$ e $([[x_i,x_j],x_j])^{\binom{q}{2}}$ sempre pertencem a $\Phi(F_3/F_4)$ e desta forma podemos concluir que $([x_i,x_j]^q \bmod F_4)\in H_3\Phi(F_3/F_4)$ para i,j quaisquer. Por fim, uma vez que $H_3\Phi(F_3/F_4)$ contém as classes de $x_i^{q^2}[x_i^q,x_2]$ e $[x_i^q,x_2]$, podemos concluir que $(x_i^{q^2} \bmod F_4)\in H_3\Phi(F_3/F_4)$ para todo $1\leq i\leq n$. Com isto, obtemos as igualdades desejadas:

$$F_3/F_4=H_3\Phi(F_3/F_4)=H_3\,, \quad \text{pela parte (II) da Proposição 1.1.3}$$

(Caso $q=2$). Faça

$$z=\begin{cases} x_1, \text{ se } n \text{ for ímpar,}\\ x_2, \text{ se } n \text{ for par.}\end{cases}$$

Por hipótese, H_3 contém x_i^4 para todo $x_i\neq z$. Pelos itens (iii) e (iv), sabemos que $(x_i^4[x_i^2,z] \bmod F_4)$ pertence a H_3 para todo $1\leq i\leq n$, e, deste modo, para $x_i=z$ concluímos que H_3 também contém z^4. Além disto, H_3 contém a classe de $[x_i^2,z]$ para todo $1\leq i\leq n$. Os itens (i)-(iii) garantem que as classes dos elementos $[[x_i,z],x_i]$ pertencem a H_3 para todo i, e, portanto, da primeira congruência na equação (2.5) concluímos que:

$$([x_i,z]^2 \bmod F_4)=([x_i^2,z][[x_i,z],x_i] \bmod F_4)\in H_3\,.$$

Para $x_i\neq x_j$ ambos distintos de z, esta mesma congruência fornece

$$[x_i,x_j]^2\equiv [x_i^2,x_j][[x_i,x_j],x_i] \pmod{F_4}.$$

Os itens (i)-(iii) garantem que o lado direito está em H_3, e, portanto, o lado esquerdo também deve estar. Assim, mostramos que H_3 contém as classes de todos os elementos x_i^4 e $[x_i,x_j]^2$. Disto, podemos concluir que $H_3=F_3/F_4$.

Assumamos agora que para todo $k' < k$ tenhamos $F_{k'}/F_{k'+1} = H_{k'}$, e provaremos esta igualdade para k. Relembramos que é necessário provar apenas que $(t^q \bmod F_{k+1}) \in H_k$ para cada $t \in F_{k-1}/F_k$. Pela hipótese de indução, existem $a_i \in R$ e $t_1, \cdots, t_n \in F_{k-2}/F_{k-1}$ tais que:

$$t \equiv \prod_{i=1}^{n} x_i^{a_i q^{k-2}} d_{k-1}(t_1, \cdots, t_n) \pmod{F_k}, \quad a_i = 0 \text{ se } x_i = z \text{ ou } q \neq 2\,.$$

Como elevar a q é um homomorfismo de F_{k-2}/F_{k-1} em F_{k-1}/F_k, isto nos fornece:

$$t^q \equiv \prod_{i=1}^{n} x_i^{a_i q^{k-1}} d_{k-1}(t_1^q, \cdots, t_n^q) \pmod{F_k}, \quad a_i = 0 \text{ se } x_i = z \text{ ou } q \neq 2\,.$$

Desta forma, a classe de t^q pertence a H_k, como desejado. $\square$

2.3.3 Apresentação de um grupo de Dëmushkin

O objetivo agora é demonstrar a seguinte classificação parcial:

Teorema 2.3.9 ([Lab67, Teo. 3])**.** *Sejam F um grupo pro-p livre de posto n, e $r \in F^q[F, F]$. Seja L o subgrupo normal fechado gerado por r, e suponha que $G = F/L$ seja um grupo de Dëmushkin com invariante $q(G) = q$. Então:*

(1) *Se $q \neq 2$, existe uma base $x_1, \cdots, x_n$ de F tal que*

$$r = x_1^q [x_1, x_2] \cdots [x_{n-1}, x_n]\,;$$

(2) *se $q = 2$ e n é ímpar, existe uma base $x_1, \cdots, x_n$ de F tal que*

$$r = x_1^2 x_2^{2^f} [x_2, x_3] \cdots [x_{n-1}, x_n]$$

para algum $2 \leq f \leq \infty$;

(3) *se $q = 2$ e n é par, existe uma base $x_1, \cdots, x_n$ de F tal que*

$$r = x_1^{2+\alpha} [x_1, x_2] x_3^{2^f} [x_3, x_4] \cdots [x_{n-1}, x_n]$$

para algum $2 \leq f \leq \infty$ e $\alpha \in 4\mathbb{Z}_2$.

O caso (1) foi provado por S. Dëmushkin em [Dë61] e o caso (2) foi provado por J.P. Serre em [Ser64]. O principal resultado da tese de J. Labute [Lab67, Teo. 1] é a classificação de (3) nos dois subcasos $[\mathrm{Im}(\chi_G)\colon \mathrm{Im}(\chi_G)^2] = 2$ e $[\mathrm{Im}(\chi_G)\colon \mathrm{Im}(\chi_G)^2] = 4$. Pelo Lema 2.3.2, todos os grupos dados pelas apresentações do Teorema 2.3.9 são grupos de Dëmushkin, e os resultados de [Lab67] completa a classificação das apresentações de grupos de Dëmushkin em função de $d(G)$ e χ_G, mostrando que todos são dados pela lista dada. Em particular, os valores de f e α dos casos (2) e (3) podem ser todos obtidos a partir da imagem $\mathrm{Im}(\chi_g)$, procedimento que descreveremos na Seção 2.3.4. Apresentaremos a seguir a demonstração do Teorema 2.3.9 e comentaremos a solução do caso (3) por Labute.

Demonstração do Teorema 2.3.9. Manteremos a notação da Seção 2.3.2: para toda base $x = (x_1, \cdots, x_d)$ de F, $r_0(x)$ denota a função

$$r_0(x) = \begin{cases} x_1^q[x_1, x_2] \cdots [x_{n-1}, x_n], \text{ se } n \text{ for par,} \\ x_1^q[x_2, x_3] \cdots [x_{n-1}, x_n], \text{ se } n \text{ for ímpar,} \end{cases}$$

e, para cada base x fixa, $d_{k-1}\colon\ (F_{k-1}/F_k)^n \to F_k/F_{k+1}$ denota o homomorfismo

$$d_{k-1}(t_1, \cdots, t_n) \equiv \begin{cases} [x_1, t_1]^{\binom{q}{2}} t_1^q \prod_{k=1}^{n/2} [t_{2k-1}, x_{2k}] [x_{2k-1}, t_{2k}], \text{ se } n \text{ for par,} \\ [x_1, t_1] t_1^q \prod_{k=1}^{(n-1)/2} [t_{2k}, x_{2k+1}] [x_{2k}, t_{2k+1}], \text{ se } n \text{ for ímpar.} \end{cases}$$

Pela Proposição 2.3.6, sabemos que existe uma base $x^{(3)} = (x_1^{(3)}, \cdots, x_n^{(3)})$ de F tal que $r \equiv r_0(x^{(3)}) \pmod{F_3}$. Por indução sobre k, mostraremos que existe $t_{1,k}, \cdots, t_{n,k} \in F_{k-1}$ tais que $x_i^{(k+1)} = t_{i,k}^{-1} x_i^{(k)}$ ainda é uma base de F, e temos $r \equiv r_0(x^{(k+1)}) \pmod{F_{k+1}}$ se $q \neq 2$ ou algo similar a isso se $q = 2$. Separaremos a demonstração desta indução em cada um dos casos (1), (2) e (3) do teorema.

(Caso (1): $q \neq 2$). Suponhamos que $x^{(k)} = (x_1^{(k)}, \cdots, x_n^{(k)})$ satisfaça $r \equiv r_0(x^{(k)}) \pmod{F_k}$, isto é, que exista um elemento $e_k \in F_k$ tal que $r = e_k r_0(x^{(k)})$. Pelo Lema 2.3.8, sabemos que F_k/F_{k+1} é gerado pela imagem de d_{k-1}, e portanto existem $t_{1,k}, \cdots, t_{n,k} \in F_{k-1}$ tais que

$$e_k \cdot d_{k-1}(t_{1,k}, \cdots, t_{n,k}) \equiv 1 \pmod{F_{k+1}}.$$

Assim, pela Proposição 2.3.7, temos que $x_i^{(k+1)} = t_{i,k}^{-1} x_i^{(k)}$ ainda é uma base de F e que esta satisfaz:

$$\begin{aligned} r &= e_k \cdot r_0(x^{(k)}) \\ &\equiv e_k \cdot d_{k-1}(t_{1,k}, \cdots, t_{n,k}) \cdot r_0(x^{(k+1)}) \pmod{F_{k+1}} \\ &\equiv r_0(x^{(k+1)}) \pmod{F_{k+1}} \end{aligned}$$

Assim, fazendo $x_i = \lim_{k\to\infty} x_i^{(k)}$, temos que $r \equiv r_0(x) \pmod{F_k}$ para todo $k \geq 3$ e portanto $r = r_0(x)$, como desejado.

(Caso (2): $q = 2$, $n \in 2\mathbb{Z}+1$). Suponhamos que $x^{(k)} = (x_1^{(k)}, \cdots, x_n^{(k)})$ satisfaça

$$r = e_k \cdot r_0(x^{(k)}) \cdot (x_2^{(k)})^{\lambda_2} \cdots (x_n^{(k)})^{\lambda_n}$$

para algum $e_k \in F_k$ e certos $\lambda_2, \cdots, \lambda_n \in 4\mathbb{Z}_2$ com $k \geq 3$. Para quaisquer $t_{i,k} \in F_{k-1}$, fazendo $y = (y_i) = (t_{i,k}^{-1} x_i^{(k)})$ temos:

$$\begin{aligned}
(x_i^{(k)})^4 &= (t_{i,k} y_i)^4 \\
&\equiv \left([y_i, t_{i,k}] t_{i,k}^2 y_i^2\right)^2 \pmod{F_{k+1}} \\
&\equiv y_i^4\,, \text{ pois } t_{i,k}^2 \text{ e } [y_i, t_{i,k}] \text{ são centrais em } F/F_{k+1}\,.
\end{aligned}$$

Portanto, vale que

$$\begin{aligned}
r &= e_k r_0(x^{(k)})(x_2^{(k)})^{\lambda_2} \cdots (x_n^{(k)})^{\lambda_n} \\
&\equiv e_k \cdot d_{k-1}(t_{1,k}, \cdots, t_{n,k}) \cdot r_0(y) \cdot y_2^{\lambda_2} \cdots y_n^{\lambda_n} \pmod{F_{k+1}} \\
&\equiv r_0(y) \cdot e_k \cdot d_{k-1}(t_{1,k}, \cdots, t_{n,k}) \cdot y_2^{\lambda_2} \cdots y_n^{\lambda_n}\,, \text{ pois } F_k/F_{k+1} \subseteq Z(F/F_{k+1})\,.
\end{aligned}$$

Pelo Lema 2.3.8 e pelo Corolário 2.3.5, sabemos que F_k/F_{k+1} é gerado pela imagem de d_{k-1} e pelas classes de $(x_i^{(k)})^{2^{k-1}}$ para $2 \leq i \leq n$. Assim, existem $t_{i,k} \in F_{k-1}$ e $a_i \in \{0,1\}$ tais que:

$$\begin{aligned}
e_k \cdot d_{k-1}(t_{1,k}, \cdots, t_{n,k}) &\equiv (x_2^{(k)})^{a_2 2^{k-1}} \cdots (x_n^{(k)})^{a_n 2^{k-1}} \pmod{F_{k+1}} \\
&\equiv y_2^{a_2 2^{k-1}} \cdots y_n^{a_n 2^{k-1}} \pmod{F_{k+1}}\,, \text{ pois } k \geq 3\,.
\end{aligned}$$

Assim, tomando $x^{(k+1)} = y$ para esta escolha de $t_{i,k}$, obtemos:

$$r \equiv r_0(x^{(k+1)}) \cdot (x_2^{(k+1)})^{\lambda_2 + a_2 2^{k-1}} \cdots (x_n^{(k+1)})^{\lambda_n + a_n 2^{k-1}} \pmod{F_{k+1}}\,.$$

Fazendo $x_i = \lim_{k\to\infty} x_i^{(k)}$, obtemos inteiros 2-ádicos $\alpha_2, \cdots, \alpha_n \in 4\mathbb{Z}_2$ tais que

$$r = r_0(x) \cdot x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n} = x_1^2 [x_2, x_3] \cdots [x_{n-1}, x_n] x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}\,.$$

Seja F' o subgrupo fechado de F gerado por $x_2, \cdots, x_n$ e definamos $G' = F'/L'$ onde L' é o subgrupo normal fechado gerado por

$$r' = [x_2, x_3] \cdots [x_{n-1}, x_n] x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}\,.$$

Temos que G' é um grupo de Dëmushkin com $q(G') = 2^f$ para algum $2 \leq f \leq \infty$, e portanto pelo caso (1) existe uma base $x'_2, \cdots, x'_n$ de F' tal que

$$r' = {x'_2}^{2^f}[x'_2, x'_3] \cdots [x'_{n-1}, x'_n] .$$

Como $r = x_1^2 r'$, obtemos a igualdade desejada tomando a base $x_1, x'_2, \cdots, x'_n$.

(Caso (3): $q = 2$, $n \in 2\mathbb{Z}$). A construção é análoga ao caso (2). Suponhamos agora que $x^{(k)} = (x_1^{(k)}, \cdots, x_n^{(k)})$ satisfaça

$$r = e_k \cdot (x_1^{(k)})^{\lambda_1} \cdot r_0(x^{(k)}) \cdot (x_3^{(k)})^{\lambda_3} \cdots (x_n^{(k)})^{\lambda_n}$$

para algum $e_k \in F_k$ e certos $\lambda_1, \lambda_3, \cdots, \lambda_n \in 4\mathbb{Z}_2$ com $k \geq 3$. Como no caso (2), o Lema 2.3.8 e o Corolário 2.3.5 garantem que existem $t_{i,k} \in F_{k-1}$ e $a_1, a_3, \cdots, a_n \in \{0, 1\}$ tais que para $x^{(k+1)} = (t_{i,k}^{-1} x_i^{(k)})$ temos:

$$r \equiv (x_1^{(k+1)})^{\lambda_1 + a_1 2^{k-1}} \cdot r_0(x^{(k+1)}) \cdot (x_3^{(k+1)})^{\lambda_3 + a_3 2^{k-1}} \cdots (x_n^{(k+1)})^{\lambda_n + a_n 2^{k-1}} \pmod{F_{k+1}} .$$

Fazendo $x_i = \lim_{k\to\infty} x_i^{(k)}$, obtemos inteiros 2-ádicos $\alpha_1, \alpha_3, \cdots, \alpha_n \in 4\mathbb{Z}_2$ tais que

$$r = x_1^{\alpha_1} \cdot r_0(x) \cdot x_3^{\alpha_3} \cdots x_n^{\alpha_n} = x_1^{2+\alpha_1}[x_1, x_2][x_3, x_4] \cdots [x_{n-1}, x_n] x_3^{\alpha_3} \cdots x_n^{\alpha_n} .$$

Daí prossegue-se como no caso (2) para $F' = \overline{\langle x_3, \cdots x_n \rangle}$. □

Como consequência da classificação parcial do Teorema 2.3.9, podemos concluir que grupos de Dëmushkin são residualmente analíticos p-ádicos livres-de-torção, fato este que será necessário no Capítulo 5 para o estudo da Conjectura de Atiyah sobre $[[\mathbb{F}_p G]]$. Precisamente:

Proposição 2.3.10 ([JZS19, Cor. 5.2]). *Todo grupo de Dëmushkin infinito G é residualmente poliprocíclico livre-de-torção.*

Demonstração. Como a classe dos grupos pro-p poliprocíclicos livres-de-torção é fechada para subgrupos e extensões, vamos aplicar o Lema 1.1.5 à série de Frattini G_n de G dada por

$$G_0 = G , \quad G_n = \Phi(G_{n-1}) = G_{n-1}^p [G_{n-1}, G_{n-1}] , \quad \forall n \geq 1 .$$

Portanto, para cada n, precisamos encontrar um subgrupo fechado $Q_n \leq_c G_n = \Phi(G_{n-1})$ tal que Q_n seja normal em G_{n-1} e G_{n-1}/Q_n seja poliprocíclico livre-de-torção. Fixemos então um $n \geq 1$ arbitrário e tomemos $U = G_{n-1}$.

Sendo U um subgrupo aberto de G, temos que U também é um grupo de Dëmushkin. Pela classificação dos grupos de Dëmushkin (Teorema 2.3.9), existe uma apresentação minimal para U dada por

$$U = \langle x_1, \cdots, x_m \mid x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} [x_{l-1}, x_l] x_3^{\alpha^3} P = 1 \rangle\,,$$

onde cada α_i é um elemento de $\mathbb{Z}_p$, $l \in \{2, 3\}$, $m = d(G) \geq 2$, $\alpha_l = 0$, $\alpha_{l-1} \in p\mathbb{Z}_p$ e P é um produto de elementos do conjunto

$$C = \{[x_i, x_j] \mid 1 \leq i < j \leq m\} - \{[x_{l-1}, x_l]\}\,.$$

Seja Q o subgrupo normal fechado de U gerado pelo conjunto C. Por definição, temos que $Q \leq \Phi(U) = G_n$ e $Q \trianglelefteq U = G_{n-1}$. Assim, U/Q é dado por uma apresentação pro-p nos geradores $x_1, \cdots, x_m$ satisfazendo as relações:

A$_{i,j}$ $[x_i, x_j] = 1$ para todo $j \neq l$ e $i < j$;

B$_k$ $[x_k, x_l] = 1$ para todo $k < l - 1$;

C $x_l^{-1} x_{l-1} x_l = x_{l-1} x_2^{-\alpha_2} x_1^{-\alpha_1} x_3^{-\alpha_3}$.

Além disso, como Q está contido no subgrupo de Frattini de U, o conjunto $\{x_1, \cdots, x_m\}$ ainda é um conjunto minimal de geradores para U/Q.

Seja H o grupo pro-p abeliano livre sobre os geradores $\{x_i \mid 1 \leq i \neq l \leq m\}$ e seja $\varphi\colon H \to H$ o isomorfismo que fixa x_i para $i \neq l-1$ e leva x_{l-1} em $x_{l-1} x_1^{-\alpha_1} x_2^{-\alpha_2} x_3^{-\alpha_3}$. Então, podemos identificar U/Q com a HNN-extensão $\mathrm{HNN}(H, H, \varphi, x_l)$ ([RZ10, p. 382]). Deste modo, a dimensão cohomológica de U/Q é finita (por exemplo, pela sequência de Mayer-Vietoris associada [RZ10, Prop. 9.4.2]) e logo U/Q é livre-de-torção. Alternativamente, podemos concluir que U/Q é livre-de-torção a partir de sua ação sobre uma p-árvore padrão ([dSSS00, Teo. 3.4.2] ou [Rib17, Cor. 7.1.3]). Assim, temos que $U/Q \simeq L \rtimes \langle x_l \rangle = \mathbb{Z}_p^{m-1} \rtimes \mathbb{Z}_p$ e, portanto, U/Q é poliprocíclico livre-de-torção, como desejado. $\square$

Relembrando que $\mathbb{U}_p^{(f)} = 1 + p^f \mathbb{Z}_p$ e $\mathbb{U}_2^{[f]} \simeq \overline{\langle -1 + 2^f \rangle}$, a classificação do caso (3) do Teorema 2.3.9 é dada pelo seguinte resultado:

Teorema 2.3.11 ([Lab67, Teo. 1]). *Seja G um grupo de Dëmushkin com $d(G) = n$ par e $q(G) = 2$. Fazendo $G = F/L$ onde F é o grupo pro-p livre sobre n geradores e L é o subgrupo normal fechado de F gerado por $r \in F$, temos que existe uma base $x_1, \cdots, x_n$ de F tal que:*

(3.A) se $[\mathrm{Im}(\chi_G) \colon \mathrm{Im}(\chi_G)^2] = 2$, então

$$r = x_1^{2+2^{f'}} [x_1, x_2] \cdots [x_{n-1}, x_n]$$

onde $\mathrm{Im}(\chi_G) = \mathbb{U}_2^{[f']}$;

(3.B) se $[\mathrm{Im}(\chi_G)\colon \mathrm{Im}(\chi_G)^2] = 4$*, então*

$$r = x_1^2[x_1, x_2]x_3^{2^f}[x_3, x_4]\cdots[x_{n-1}, x_n]$$

onde $\mathrm{Im}(\chi_G) = \{\pm 1\} \times \mathbb{U}_2^{(f)}$.

Como veremos a seguir (pelo Teorema 2.3.13), temos que o coeficiente f do caso (2) do Teorema 2.3.9 também é caracterizado por $\mathrm{Im}(\chi_G) = \{\pm 1\} \times \mathbb{U}_2^{(f)}$. Assim, um corolário dos Teoremas 2.3.9 e 2.3.11 é:

Corolário 2.3.12 ([Lab67, Teo. 2])**.** *Dois grupos de Dëmushkin G e G' com os mesmos invariantes $d(G) = d(G')$ e $\mathrm{Im}(\chi_G) = \mathrm{Im}(\chi_{G'})$ são isomorfos.*

2.3.4 Calculando o invariante ciclotômico

O objetivo desta seção final é derivar uma fórmula para o invariante ciclotômico $\chi = \chi_G$ de um grupo de Dëmushkin G em função das apresentações de cada um dos três casos do Teorema 2.3.9.

Teorema 2.3.13 ([Lab67, Teo. 4])**.** *Seja G um grupo de Dëmushkin com a apresentação dada pelo Teorema 2.3.9, e considere os mesmos casos (1), (2) e (3). A ação $\chi_G\colon G \to \mathbb{Z}_p^\times$ de G definida por seu invariante ciclotômico é o único homomorfismo satisfazendo:*

(1) $\chi_G(x_2) = 1 + q$, $\chi_G(x_i) = 1$ *se* $i \neq 2$;

(2) $\chi_G(x_1) = -1$, $\chi_G(x_3) = 1 + 2^f$, $\chi_G(x_i) = 1$ *se* $i \neq 1, 3$;

(3) $\chi_G(x_2) = 3 + \alpha$, $\chi_G(x_4) = 1 + 2^f$, $\chi_G(x_i) = 1$ *se* $i \neq 2, 4$.

Demonstração. Seja G um grupo de Dëmushkin dado por uma das apresentações do Teorema 2.3.9 e seja $\chi\colon F = F(x_1, \cdots, x_d) \to \mathbb{Z}_p^\times$ o homomorfismo contínuo dado pelas fórmulas do enunciado; elas definem um homomorfismo contínuo de G em $\mathbb{Z}_p^\times$ que por abuso de notação também denotaremos por χ, uma vez que $\chi(r) = 1$. Pela Proposição 2.2.2, se fizermos G agir sobre $J = \mathbb{Z}_p$ através de χ e mostrarmos que podemos definir arbitrariamente homomorfismos cruzados de G em J através dos geradores de G, podemos concluir que $\chi = \chi_G$ como desejado.

A Proposição 2.2.2 garante que podemos definir arbitrariamente homomorfismos cruzados $D\colon F \to J$ a partir de seus valores nos geradores $x_1, \cdots, x_n$. É então suficiente mostrarmos que D induz um homomorfismo cruzado de G em J, isto é, que $D(r) = 0$ em cada um dos casos (1), (2) e (3). Como $D(x^{-1}) = -\chi(x)^{-1}D(x)$, temos que:

$$D([x_i, x_j]) = D(x_i x_j x_i^{-1} x_j^{-1})$$

$$
\begin{aligned}
&= D(x_i x_j) + \chi(x_i)\chi(x_j) D(x_i^{-1} x_j^{-1}) \\
&= D(x_i) + \chi(x_i) D(x_j) + \chi(x_i)\chi(x_j)\left(D(x_i^{-1}) + \chi(x_i)^{-1} D(x_j^{-1})\right) \\
&= D(x_i) + \chi(x_i) D(x_j) + \\
&\qquad + \chi(x_i)\chi(x_j)\left(-\chi(x_i)^{-1} D(x_i) - \chi(x_i)^{-1}\chi(x_j)^{-1} D(x_j)\right) \\
&= D(x_i) + \chi(x_i) D(x_j) - \chi(x_j) D(x_i) - D(x_j) \\
&= (1 - \chi(x_j)) D(x_i) + (\chi(x_i) - 1) D(x_j)\,.
\end{aligned}
$$

Para o caso (1), temos:

$$
\begin{aligned}
D(r) &= D(x_1^q [x_1, x_2] \cdots [x_{n-1}, x_n]) \\
&= D(x_1^q) + \chi(x_1^q) D([x_1, x_2] \cdots [x_{n-1}, x_n]) \\
&= q D(x_1) + D([x_1, x_2]) + \chi([x_1, x_2]) D([x_3, x_4], \cdots, [x_{n-1}, x_n]) \\
&= (q + 1 - \chi(x_2)) D(x_1) = 0\,.
\end{aligned}
$$

Para o caso (2), calculamos:

$$
\begin{aligned}
D(r) &= D(x_1^2) + \chi(x_1^2) D(x_2^{2^f} [x_2, x_3] \cdots [x_{n-1}, x_n]) \\
&= D(x_2^{2^f}) + \chi(x_2^{2^f}) D([x_2, x_3] \cdots [x_{n-1}, x_n]) \\
&= 2^f D(x_2) + D([x_2, x_3]) + \chi([x_2, x_3]) D([x_4, x_5] \cdots [x_{n-1}, x_n]) \\
&= (2^f + 1 - \chi(x_3)) D(x_2) = 0\,.
\end{aligned}
$$

Por fim, para o caso (3), obtém-se:

$$
\begin{aligned}
D(r) &= D(x_1^{2+\alpha}) + \chi(x_1^{2+\alpha}) D([x_1, x_2] x_3^{2^f} [x_3, x_4] \cdots [x_{n-1}, x_n]) \\
&= (2 + \alpha) D(x_1) + D([x_1, x_2]) + \chi([x_1, x_2]) D(x_3^{2^f} [x_3, x_4] \cdots [x_{n-1}, x_n]) \\
&= (2 + \alpha + 1 - \chi(x_2)) D(x_1) + D(x_3^{2^f}) + \chi(x_3^{2^f}) D([x_3, x_4] \cdots [x_{n-1}, x_n]) \\
&= 2^f D(x_3) + D([x_3, x_4]) + \chi([x_3, x_4]) D([x_5, x_6] \cdots [x_{n-1}, x_n]) \\
&= (2^f + 1 - \chi(x_4)) D(x_3) = 0\,.
\end{aligned}
$$

□

Recordamos a notação $\mathbb{U}_p^{(f)} = 1 + p^f \mathbb{Z}_p$ e $\mathbb{U}_2^{[f]} \simeq \overline{\langle -1 + 2^f \rangle}$ para os subgrupos de $\mathbb{Z}_p^\times$.

Corolário 2.3.14 ([Lab67, Cor. do Teo. 4])**.** *Seguindo a notação de cada um dos casos (1), (2) e (3) do Teorema 2.3.9 e os casos (3.A) e (3.B) do Teorema 2.3.11, temos que:*

$$\mathrm{Im}(\chi) = \begin{cases} 1 + q\mathbb{Z}_p, \textit{ no caso (1),} \\ \{\pm 1\} \times \mathbb{U}_2^{(f)}, \textit{ no caso (2),} \\ \{\pm 1\} \times \mathbb{U}_2^{(f)}, \textit{ no caso (3) se } v_2(4+\alpha) \geq f, \textit{ equiv. caso (3.B),} \\ \mathbb{U}_2^{[f']}, \textit{ no caso (3) se } f' = v_2(4+\alpha) < f, \textit{ equiv. caso (3.A).} \end{cases}$$

Demonstração. Isto é uma consequência direta do Lema 1.1.1 aplicado às fórmulas do Teorema 2.3.13. Observe que no caso (3) a valoração da projeção P da imagem $\mathrm{Im}(\chi_G)$ no subgrupo $\mathbb{U}_2^{(2)}$ é dada por:

$$v_2(P) = \min\{v_2(4+\alpha), f\}$$

uma vez que

$$3 + \alpha = (-1) \cdot (1 - (4 + \alpha))\,. \qquad \square$$

É importante ressaltar que há diferenças entre as fórmulas do Teorema 2.3.13 e seu respectivo enunciado em [Lab67, Teo. 4]. Isto se deve à convenção $[x, y] = xyx^{-1}y^{-1}$ adotada nesta exposição (e em [Dë61], [Ser64], [And68]), a qual difere da convenção $(x, y) = x^{-1}y^{-1}xy$ adotada no texto de J. Labute. De fato, uma diferença ainda maior ocorre: as bases fornecidas pelo Teo. 3 de [Lab67] e pelo Teorema 2.3.9 são distintas, uma vez que a relação se torna outra ao trocarmos a definição dos comutadores.

Parte II

Hic sunt leones

Capítulo 3

Propriedade de Howson

A propriedade que grupos pro-p livres satisfazem como consequência da versão pro-p do Teorema de Howson (Teorema 1.5.8) é chamada de *propriedade de Howson*: dizemos que um grupo profinito (respectivamente, abstrato) G possui a propriedade de Howson se a interseção de dois subgrupos fechados topologicamente finitamente gerados (respectivamente, subgrupos finitamente gerados) é topologicamente finitamente gerada (respectivamente, finitamente gerada).

Algumas consequências são imediadas da definição: se G é um grupo com a propriedade de Howson e $H_1, \cdots, H_n$ são subgrupos de G topologicamente finitamente gerados, então $\bigcap_{i=1}^{n} H_i$ também será topologicamente finitamente gerada. Algumas classes de grupos para as quais é direto demonstrar a propriedade de Howson são os grupos finitos, os grupos abelianos abstratos e profinitos e os grupos profinitos de posto-de-subgrupos finito.

Já são fatos estabelecidos na literatura que outras classes de grupos profinitos e abstratos possuem a propriedade de Howson. Howson, em seu artigo [How54] de 1954, estudou e demonstrou essa propriedade para todos os grupos abstratos livres. Em 1960, Greenberg [Gre60] provou que todos os grupos Fuchsianos possuem a propriedade de Howson. Um grupo G é Fuchsiano se ele é isomorfo a um subgrupo discreto de PSL$(2, \mathbb{R})$, e esta classe inclui todos os grupos de superfície. Em 1965, Baumslag [Bau65] provou que a propriedade de Howson é fechada para o produto livre, isto é, se H e K são dois grupos abstratos com a propriedade de Howson, então $H * K$ também possui a propriedade de Howson. Isto prova como corolário o resultado de Howson para grupos livres, uma vez que estes são isomorfos ao produto livre de cópias do grupo aditivo $\mathbb{Z}$.

A propriedade foi estendida ao mundo pro-p em 1982 por Lubotzky [Lub82], que demonstrou a versão pro-p do Teorema de Howson (enunciado no Teorema 1.5.8). O objetivo deste capítulo é demonstrar esta validade para os grupos de Dëmushkin, seguindo [SZ19], a principal referência desta exposição.

Além disso, para H e K subgrupos finitamente gerados de um mesmo grupo livre, Howson demonstrou que

$$d(H \cap K) - 1 \leq 2d(H)d(K) - d(H) - d(K)\,.$$

Esta cota seria melhorada por H. Neumann [Neu57], que demonstrou a desigualdade

$$d(H \cap K) - 1 \leq 2(d(H) - 1)(d(K) - 1)\,.$$

Neste mesmo artigo, H. Neumann propôs:

Conjectura (Hanna Neumann). Se H e K são subgrupos finitamente gerados de um mesmo grupo livre, então

$$d(H \cap K) - 1 \leq (d(H) - 1)(d(K) - 1)\,.$$

Uma versão mais forte desta conjectura foi provada em 2011 ([Fri15], [Min12]). Entretanto, ainda é um problema obter cotas como a cota de Neumann para diversas classes de grupos com a propriedade de Howson, levando à busca por mais generalizações. Para grupos pro-p livres G, a Conjectura Forte de Hanna Neumann foi demonstrada por A. Jaikin-Zapirain:

Teorema 3.0.1 ([JZ17, Teo. 1.1])**.** *Sejam H e K dois subgrupos fechados topologicamente finitamente gerados de um grupo pro-p livre F. Então, vale a desigualdade*

$$\sum_{x \in H\backslash F/K} \overline{d}(H \cap xKx^{-1}) \leq \overline{d}(H)\overline{d}(K)\,,$$

onde $\overline{d}(G) = \max\{d(G) - 1, 0\}$. Em particular, $H \cap K$ é finitamente gerado e temos

$$d(H \cap K) - 1 \leq (d(H) - 1)(d(K) - 1)\,.$$

A validade da Conjectura de Hanna Neumann para grupos de Dëmushkin é o objeto de análise do Capítulo 5.

3.1 Propriedade de Howson

Relembramos que, se G é um grupo de Dëmushkin infinito e U é um subgrupo aberto de G, a fórmula do posto da Proposição 2.1.10 garante que

$$d(U) - 2 = [G\colon U](d(G) - 2)\,.$$

Além disto, se $H \leq_c G$ é um subgrupo fechado de índice infinito, temos que H é um grupo pro-p livre (Exemplo 1.3.11).

Juntando esses fatos e a desigualdade de Hanna Neumann para grupos pro-p livres do Teorema 3.0.1, podemos provar que todo grupo de Dëmushkin possui a propriedade de Howson, e ainda obter uma cota para o posto da interseção de dois subgrupos finitamente gerados. A demonstração que seguiremos é dada em [SZ19].

Teorema 3.1.1 ([SZ19, Teo. 3.1])**.** *Sejam p um primo e G um grupo de Dëmushkin pro-p. Se A e B são subgrupos fechados não triviais de G e topologicamente finitamente gerados, então*

$$d(A \cap B) - 1 \leq p^2(d(A) + d(B) - 2)^2(d(A) - 1)(d(B) - 1)\,.$$

Demonstração. Se $d(G) \leq 2$, então todo subgrupo aberto U de G também satisfaz $d(U) = 2$ pela cota da característica de Euler. Como $H^1(H) = \varinjlim H^1(U)$ para H um subgrupo fechado de G e U subgrupos abertos contendo H, obtemos também que $d(H) \leq 2$. Assim, podemos supor que $d(G) \geq 3$.

Se A ou B forem abertos em G, também obtemos uma cota mais refinada. Sem perda de generalidade, supondo que B é aberto em G, então $A \cap B$ é aberto em A e pela desigualdade do posto (Corolário 1.3.4), temos:

$$\begin{aligned} d(A \cap B) - 1 &\leq (d(A) - 1)[A\colon A \cap B] \\ &= (d(A) - 1)[\overline{\langle A, B\rangle}\colon B] \\ &\leq (d(A) - 1)[G\colon B] \\ &\leq (d(A) - 1)(d(B) - 1)\,, \text{ pois } d(G) \geq 3\,. \end{aligned}$$

Assim, podemos supor que ambos A e B possuem índice infinito em G. Como G é pro-p, sejam $\{U_k\}$ e V_k, $k \in \mathbb{N}$, duas cadeias de subgrupos abertos em G, tais que $U_0 = V_0 = G$, $\bigcap U_k = A$, $\bigcap V_k = B$ e $U_k/U_{k+1} \simeq V_k/V_{k+1} \simeq \mathbb{F}_p$. Assim, temos que

$$[G\colon U_k] = [G\colon V_k] = p^k\,.$$

Se $d(A) = 1$, então a desigualdade do enunciado vale trivialmente. Podemos então assumir que $d(A) > 1$ e definir

$$n = \left\lfloor \log_p(d(A) + d(B) - 2)\right\rfloor + 1\,.$$

Temos que $p^{n-1} \leq d(A) + d(B) - 2$ e $p^n > d(A) + d(B) + 1$. Defina $A_0 = A \cap V_n$ e $B_0 = B \cap U_n$. Desta forma, vale que $A \cap B = A_0 \cap B_0$ e que $C = \overline{\langle A_0, B_0\rangle}$ é um subgrupo de $U_n \cap V_n$. Temos a seguinte cota para o posto de C:

$$\begin{aligned}
d(C) &\leq d(A_0) + d(B_0) \\
&\leq (d(A) - 1)[A\colon A_0] + (d(B) - 1)[B\colon B_0] + 2\,, \text{ pela Desig. do Posto} \\
&\leq (d(A) - 1)[U_n\colon U_n \cap V_n] + (d(B) - 1)[V_n\colon U_n \cap V_n] + 2 \\
&= [G\colon U_n \cap V_n]\left(\frac{d(A)-1}{[G\colon U_n]} + \frac{d(B)-1}{[G\colon V_n]}\right) + 2 \\
&= [G\colon U_n \cap V_n]\left(\frac{d(A)+d(B)-2}{p^n}\right) + 2 \\
&< [G\colon U_n \cap V_n] + 2 \leq (d(G) - 2)[G\colon U_n \cap V_n] + 2\,, \text{ pois } d(G) \geq 3
\end{aligned}$$

Assim, se C fosse aberto em G, teríamos que

$$d(C) = (d(G) - 2)[G\colon C] + 2 \leq (d(G) - 2)[G\colon U_n \cap V_n] + 2$$

contradizendo a desigualdade anterior. Desta forma, C é um subgrupo fechado de G e portanto um grupo pro-p livre finitamente gerado. Podemos agora aplicar a cota de Hanna Neumann (Teorema 3.0.1) ao subgrupo $A \cap B = A_0 \cap B_0$ de C:

$$\begin{aligned}
d(A \cap B) - 1 &\leq (d(A_0) - 1)(d(B_0) - 1) \\
&\leq (d(A) - 1)[A\colon A_0](d(B) - 1)[B\colon B_0]\,, \text{ pela Desig. do Posto} \\
&\leq (d(A) - 1)[G\colon V_n](d(B) - 1)[G\colon U_n] \\
&= p^{2n}(d(A) - 1)(d(B) - 1) \\
&= p^2 p^{2(n-1)}(d(A) - 1)(d(B) - 1) \\
&\leq p^2(d(A) + d(B) - 2)^2(d(A) - 1)(d(B) - 1)\,. \qquad \square
\end{aligned}$$

3.2 Produtos livres e a propriedade de Howson

Unindo os Teoremas 1.5.8 e 3.1.1 obtemos duas classes de grupos pro-p que satisfazem a propriedade de Howson: grupos pro-p livres e grupos de Dëmushkin. Uma extensão ainda maior da classe dos grupos com a propriedade de Howson é dada pela versão pro-p do Teorema de Baumslag, que afirma que o produto pro-p livre de uma coleção finita de grupos com a propriedade de Howson também possui a propriedade de Howson, isto é, a classe dos grupos com a propriedade de Howson é fechada para produtos pro-p livres finitos. A versão clássica deste teorema, provada em [Bau65], foi estendida para grupos pro-p em [SZ19], cujo argumento exporemos nesta seção.

Primeiramente, verificaremos que é possível virtualmente fatorar subgrupos fechados em produtos livres:

Lema 3.2.1 ([SZ19, Teo. 4.2]). *Sejam $G_1, \cdots, G_n$ grupos pro-p e $G = \coprod_{i=1}^{n} G_i$ o produto pro-p livre deles. Se H é um subgrupo fechado topologicamente finitamente gerado de G e*

$$H \simeq \left[\coprod_{i=1}^{n} \coprod_{u \in D_i} uG_iu^{-1} \cap H\right] \coprod F_H$$

é sua decomposição dada pelo Teorema de Kurosh (Teorema 1.5.7). Então, existe um subgrupo aberto V de G tal que para todo subgrupo aberto U de V a decomposição de Kurosh de U é dada por

$$U \simeq \left[\coprod_{i=1}^{n} \coprod_{u_{i,j} \in D_i^U} u_{i,j}G_iu_{i,j}^{-1} \cap U\right] \coprod F_U$$

com $D_i \subseteq D_i^U$. Além disso, existe uma decomposição $F_H \simeq \varprojlim_{U \trianglelefteq_o V} F_U$ induzida pelas inclusões $H \to U$.

Demonstração. Seja H um subgrupo fechado topologicamente finitamente gerado de G. Pelo Teorema de Kursoh para subgrupos finitamente gerados (Teorema 1.5.7), existem conjuntos D_i de representantes distintos das classes laterais duplas $H\backslash G/G_i$ e um pro-p livre de posto finito F_H tal que

$$H = \left[\coprod_{i=1}^{n} \coprod_{u \in D_i} uG_iu^{-1} \cap H\right] \coprod F_H\,.$$

Podemos assumir que $uG_iu^{-1} \cap H \neq \{1\}$ para todo $u \in D_i$ e todo $1 \leq i \leq n$. Como H é topologicamente finitamente gerado, pela versão pro-p do Teorema de Grusko-Neumann (Teorema 1.5.2) cada conjunto $D_i = \{u_{i,j} \mid 1 \leq j \leq r_i\}$ é finito e cada interseção $u_{i,j}G_iu_{i,j}^{-1} \cap H$ é topologicamente finitamente gerada.

Uma vez que cada D_i é finito, escolhamos um subgrupo aberto V_i de G contendo H tal que $u_{i,j}u_{i,k}^{-1} \notin G_iV_i$ para todo $1 \leq j \neq i \leq r_i$, e tome

$$V = \bigcap_{i=1}^{n} V_i\,.$$

Assim, para todo par de representantes $u_{i,j} \neq u_{i,k}$ e todo subgrupo aberto U de V contendo H vale que $Uu_{i,j}G_i \neq Uu_{i,k}G_i$. Em particular, os conjuntos D_i podem ser expandidos em conjuntos $D_i^U = \{u_{i,j} \mid 1 \leq j \leq t_i\}$ de representantes completos das classes laterais duplas $U\backslash G/G_i$.

Pelo Teorema de Kurosh para subgrupos abertos (Teorema 1.5.6), temos uma decomposição:

$$U \simeq \left[\coprod_{i=1}^{n} \coprod_{u_{i,j}\in D_i^U} u_{i,j}G_iu_{i,j}^{-1} \cap U\right] \coprod F_U\,. \tag{3.1}$$

Seja $\tilde{U}$ (respectivamente, $\tilde{H}$) o núcleo da projeção $U \to F_U$ (respectivamente, $H \to F_H$). Vamos primeiro mostrar que $\tilde{H} = \bigcap_{U\trianglelefteq_o V} \tilde{U}$, e portanto que

$$F_H \simeq H/\tilde{H} \simeq \varprojlim_{U\trianglelefteq_o V} U/\tilde{U} \simeq \varprojlim_{U\trianglelefteq_o V} F_U\,.$$

De fato, $\tilde{U}$ é gerado topologicamente pelo subconjunto

$$Y_U = \bigcup_{y\in U} y\left(\bigcup_{i=1}^{n} \bigcup_{u_{i,j}\in D_i^U} u_{i,j}G_iu_{i,j}^{-1} \cap U\right) y^{-1}\,.$$

Como para todo $g \in G$ existem $y \in U$, $t \in G_i$ e $u_{i,j}$ tais que $g = yu_{i,j}t$, temos

$$gG_ig^{-1} \cap U = yu_{i,j}G_iu_{i,j}^{-1}y^{-1} \cap U = y\left(u_{i,j}G_iu_{i,j}^{-1} \cap U\right)y^{-1}\,.$$

Desta forma, Y_U coincide com o conjunto

$$Y_U = U \cap \bigcup_{i=1}^{n}\bigcup_{g\in G} gG_ig^{-1}\,,$$

de onde podemos concluir que $Y_H = \bigcap_{U\trianglelefteq_o V} Y_U$. Disto, a igualdade $\tilde{H} = \bigcap_{U\trianglelefteq_o V} \tilde{U}$ segue decompondo V em um limite inverso de grupos finitos e reduzindo ao caso finito. □

Proposição 3.2.2 ([SZ19, Cor. 4.3])**.** *Sejam $G_1, \cdots, G_n$ grupos pro-p e tome $G = \coprod_{i=1}^n G_i$ seu produto pro-p livre. Se H é um subgrupo fechado topologicamente finitamente gerado de G, então existe um subgrupo aberto U de G contendo H, subgrupos fechados $U_1, \cdots, U_m$ de U e subgrupos fechados H_i de U_i para todo $1 \le i \le m$ tais que*

$$U = \coprod_{i=1}^{m} U_i \quad e \quad H = \coprod_{i=1}^{m} H_i\,.$$

Demonstração. Seguindo a notação Lema 3.2.1 e denotando por $\pi_U\colon F_H \to F_U$ o homomorfismo dado pelo limite inverso, seja M um subgrupo aberto de V contendo H tal que $d(\pi_M(F_H)) = d(F_H)$. Como $\pi_M(F_H)$ é também um grupo pro-p livre de posto $d(F_H)$, a propriedade Hopfiana (Proposição 1.1.4) garante que π_M é injetiva. Assim, podemos identificar F_H com $\pi_M(H)$, e M é o subgrupo aberto desejado. □

Precisaremos agora de dois lemas:

Lema 3.2.3 ([SZ19, Prop. 4.4 e 4.5])**.** *Seja G um grupo pro-p agindo continuamente sobre um espaço profinito X. Se $S \subseteq X$ é um subconjunto finito tal que as órbitas $\{O_s\}_{s\in S}$ são distintas duas-a-duas, então para $T = \bigcup_{s\in S} O_s$ temos*

$$H_n(G, [[\mathbb{F}_p T]]) \simeq \bigoplus_{s\in S} H_n(G_s, \mathbb{F}_p)\,.$$

Em particular, se G age livremente sobre X, então $H_n(G, [[\mathbb{F}_p X]]) = 0$ para $n > 0$. Além disso, se $R \subseteq X$ é um subconjunto fechado G-invariante de X, então a inclusão $R \hookrightarrow X$ induz homomorfismos contínuos injetivos

$$\eta_R \colon H_n(G, [[\mathbb{F}_p R]]) \to H_n(G, [[\mathbb{F}_p X]])\,.$$

Demonstração. A primeira parte é uma aplicação direta do isomorfismo de Shapiro:

$$\begin{aligned}
H_n(G, [[\mathbb{F}_p T]]) &= H_n(G, [[\mathbb{F}_p \bigcup_{s\in S} O_s]]), \text{ pela definição de } T\\
&\simeq H_n(G, \bigoplus_{s\in S}[[\mathbb{F}_p O_s]]), \text{ pela Proposição 1.2.2}\\
&\simeq \bigoplus_{s\in S} H_n(G, [[\mathbb{F}_p O_s]]), \text{ pela Proposição 1.2.3}\\
&\simeq \bigoplus_{s\in S} H_n(G, [[\mathbb{F}_p (G/G_s)]]), \text{ pelo homeomorfismo } G/G_s \simeq O_s\\
&\simeq \bigoplus_{s\in S} H_n(G, \mathrm{Ind}_{G_s}^G \mathbb{F}_p), \text{ pela definição de } \mathrm{Ind}\\
&\simeq \bigoplus_{s\in S} H_n(G_s, \mathbb{F}_p), \text{ pelo isomorfismo de Shapiro.}
\end{aligned}$$

Notemos que X possui uma base formada por subconjuntos G-invariantes simultaneamente abertos e fechados. Este argumento é uma adaptação da demonstração de [RZ10, Lem. 5.6.4]. De fato, se U é um subconjunto aberto e fechado de X, tomemos $S = \bigcap_{g\in G} gU$. Com certeza, S é G-invariante, fechado e está contido em U. Fixemos $x \in S$: para todo $g \in G$, temos que $gx \in S \subseteq U$, e assim, pela continuidade da ação de G, para todo $g \in G$ existem vizinhanças $V_g \subseteq G$ de g e $W_g \subseteq U$ de x tais que $V_g W_g \subseteq U$. Como os $\{V_g\}$ formam uma cobertura aberta de G, existe uma subcobertura finita $V_{g_1}, \cdots, V_{g_n}$. Tome $W_x = \bigcap_{i=1}^n W_{g_i}$. Por construção, temos que W_x é uma vizinhança aberta de x contida em S. Como x é um elemento arbitrário de S, podemos concluir que S é aberto.

Assim, temos uma decomposição na homologia para U um subconjunto G-invariante aberto e fechado de X contendo R:

$$H_n(G, [[\mathbb{F}_p X]]) = H_n(G, [[\mathbb{F}_p U]]) \oplus H_n(G, [[\mathbb{F}_p(X - U)]]) .$$

Em particular, o homomorfismo induzido $\eta_U \colon H_n(G, [[\mathbb{F}_p U]]) \to H_n(G, [[\mathbb{F}_p X]])$ é injetivo. Como R é a interseção de todos os tais subconjuntos U, temos que $\eta_R = \varprojlim \eta_U$ e portanto também é injetivo. $\square$

Lema 3.2.4 ([SZ19, Lem. 4.6]). *Seja G um grupo pro-p agindo sobre um espaço profinito X, e suponha que os estabilizadores $G_x = \{g \in G \mid gx = x\}$ sejam subgrupos topologicamente finitamente gerados para todo $x \in X$. Então, $H_1(G, [[\mathbb{F}_p X]])$ é finito se, e somente se, há uma quantidade finita de G-órbitas em X sobre as quais G não age livremente.*

Demonstração. Seja T o conjunto dos pontos em X cujo estabilizador não é trivial:

$$T = \{x \in X \mid G_x \neq \{1\}\} .$$

Temos que T é um conjunto G-invariante, uma vez que $G_x \neq \{1\}$ se, e somente se, $G_{gx} = g^{-1} G_x g \neq \{1\}$. Assim, a inclusão $T \hookrightarrow X$ induz uma inclusão $G \backslash T \hookrightarrow G \backslash X$. Dessa forma, assumamos que $G \backslash T$ é finito e, portanto, fechado, e temos que T também é fechado em X.

Denotemos por M o $[[\mathbb{F}_p G]]$-módulo $[[\mathbb{F}_p X]]/[[\mathbb{F}_p T]]$. Pela Proposição 1.2.2, temos um isomorfismo $M \simeq [[\mathbb{F}_p(X/T, *)]]$ onde $*$ representa a imagem de T em X/T. Como G age livremente sobre $X - T$ e consequentemente sobre M, pelo Lema 3.2.3 podemos concluir que $H_n(G, M) = \{0\}$ para $n > 0$.

A sequência exata curta

$$0 \to [[\mathbb{F}_p T]] \to [[\mathbb{F}_p X]] \to M \to 0$$

induz uma sequência exata longa na homologia que nos permite concluir que $H_n(G, [[\mathbb{F}_p T]]) \simeq H_n(G, [[\mathbb{F}_p X]])$ para todo $n \geq 1$, e, em particular, em dimensão 1. Escolha um conjunto completo de representantes S de $G \backslash T$ em T, e aplicando o Lema 3.2.3 podemos concluir que

$$H_1(G, [[\mathbb{F}_p X]]) \simeq H_1(G, [[\mathbb{F}_p T]]) \simeq \bigoplus_{s \in S} H_1(G_s, \mathbb{F}_p) \simeq \bigoplus_{s \in S} G_s/\Phi(G_s) .$$

Por hipótese, S é um conjunto finito e cada G_s é finitamente gerado, e portanto o mesmo vale para $H_1(G, [[\mathbb{F}_p X]])$.

Agora, supondo por contradição que $H_1(G, [[\mathbb{F}_p X]])$ seja finito (de ordem $< n$ para algum n natural) e que haja uma quantidade infinita de G-órbitas em X sobre as quais G não age livremente, tome n tais G-órbitas $O_{x_1}, \cdots, O_{x_n}$ e considere $R = \bigcup_{i=1}^{n} O_{x_i}$ sua união. Temos:

$$\begin{aligned} n &> |H_1(G, [[\mathbb{F}_p X]])| \\ &\geq |H_1(G, [[\mathbb{F}_p R]])| \text{ , pelo Lema 3.2.3} \\ &= \left| \bigoplus_{i=1}^{n} H_1(G_{x_i}, \mathbb{F}_p) \right| \text{ , novamente pelo Lema 3.2.3} \\ &= \sum_{i=1}^{n} |G_{x_i}/\Phi(G_{x_i})| \geq n \end{aligned}$$

e deste modo há também apenas um número finito de G-órbitas em X sobre as quais G não age livremente. □

O último resultado que necessitamos é uma versão preliminar, mais fraca, de um análogo pro-p do Teorema de Baumslag.

Lema 3.2.5 ([SZ19, Teo. 4.7])**.** *Sejam $G_1, \cdots, G_n$ grupos pro-p que satisfazem a propriedade de Howson, e sejam H_i subgrupos fechados de G_i topologicamente finitamente gerados para todo $1 \leq i \leq n$. Defina $G = \coprod_{i=1}^{n} G_i$ e $H = \coprod_{i=1}^{n} H_i$, e tome K um subgrupo topologicamente finitamente gerado de G. Então, $K \cap H$ é topologicamente finitamente gerado.*

Demonstração. Consideremos o grafo profinito padrão Γ associado à construção do produto livre $\coprod_{i=1}^{n} G_i$, um recobrimento do grafo dado pelo Exemplo 1.6.1. Temos que $V(\Gamma)$ é homeomorfo a $\bigcup_{i=1}^{n} G/G_i$ e que $\Gamma = V(\Gamma) \cup (\cup_{i=1}^{n-1} G)$. Como Γ é uma p-árvore, temos a seguinte sequência exata curta:

$$0 \to [[\mathbb{F}_p G]]^{n-1} \to \bigoplus_{i=1}^{n} [[\mathbb{F}_p(G/G_i)]] \to \mathbb{F}_p \to 0\,. \tag{3.2}$$

Analogamente, obtemos uma sequência exata curta através do grafo profinito padrão associado à H:

$$0 \to [[\mathbb{F}_p H]]^{n-1} \to \bigoplus_{i=1}^{n} [[\mathbb{F}_p(H/H_i)]] \to \mathbb{F}_p \to 0\,. \tag{3.3}$$

Calculando a homologia de K com coeficientes nos módulos da sequência (3.2) e a homologia de $K \cap H$ com coeficientes nos módulos da sequência (3.3), e observando que $[[\mathbb{F}_p G]]$ (respectivamente, $[[\mathbb{F}_p H]]$) é um $[[\mathbb{F}_p K]]$-módulo livre pelo Cor. 5.7.2 de [RZ10] (respectivamente, $[[\mathbb{F}_p(K \cap H)]]$-módulo livre), obtemos as seguintes sequências exatas longas:

$$
\begin{aligned}
0 \to \bigoplus_{i=1}^{n} H_1(K, [[\mathbb{F}_p(G/G_i)]]) \to H_1(K, \mathbb{F}_p) \to \\
[[\mathbb{F}_p(K\backslash G)]]^{n-1} \xrightarrow{\tau} \bigoplus_{i=1}^{n} [[\mathbb{F}_p(K\backslash G/G_i)]] \to \mathbb{F}_p \to 0
\end{aligned} \tag{3.4}
$$

$$
\begin{aligned}
0 \to \bigoplus_{i=1}^{n} H_1(K\cap H, [[\mathbb{F}_p(H/H_i)]]) \to H_1(K\cap H, \mathbb{F}_p) \to [[\mathbb{F}_p(K\cap H)\backslash H]]^{n-1} \xrightarrow{\sigma} \\
\bigoplus_{i=1}^{n} [[\mathbb{F}_p(K\cap H)\backslash H/H_i]] \to \mathbb{F}_p \to 0
\end{aligned} \tag{3.5}
$$

A estratégia agora é utilizar a sequência (3.5) para mostrarmos que $H_1(K\cap H, \mathbb{F}_p) \simeq (K\cap H)/\Phi(K\cap H)$ é finito, e portanto $K\cap H$ é finitamente gerado, provando a redução do teorema. Para isto, precisamos ainda obter algumas informações sobre os grupos em ambas as sequências.

A inclusão $K\cap H \hookrightarrow K$ nos dá o seguinte diagrama comutativo:

$$
\begin{tikzcd}
{[[\mathbb{F}_p(K\backslash G)]]^{n-1}} \arrow[r, "\tau"] & \bigoplus_{i=1}^{n}[[\mathbb{F}_p(K\backslash G/G_i)]] \\
{[[\mathbb{F}_p(K\cap H)\backslash H]]^{n-1}} \arrow[u, "\alpha = \mathrm{cor}^K_{K\cap H}"] \arrow[r, "\sigma"'] & \bigoplus_{i=1}^{n}[[\mathbb{F}_p(K\cap H)\backslash H/H_i]] \arrow[u, "\mathrm{cor}^K_{K\cap H} = \beta"']
\end{tikzcd}
$$

Vamos mostrar que o núcleo de todas as aplicações envolvidas é finito. Temos que α coincide com o mapa induzido no módulo profinito livre pela composição $H \to G \to K\backslash G$, se fatorando através do quociente $(K\cap H)\backslash H$. Assim, α é injetiva. Um argumento similar também nos permite concluir que β é injetiva pois é a soma direta das aplicações injetivas $[[\mathbb{F}_p(K\cap H)\backslash H/H_i]] \to [[\mathbb{F}_p(K\backslash G/G_i)]]$. Além disso, a exatidão da sequência (3.4) nos garante que o núcleo de τ é uma imagem homomórfica de $H_1(K, \mathbb{F}_p)$, que é finito por hipótese. Logo, $\mathrm{Ker}(\tau)$ também é finito. Como $\mathrm{Ker}(\tau\alpha) = \mathrm{Ker}(\beta\sigma) = \mathrm{Ker}(\sigma)$, podemos concluir que este último é também finito.

Para todo $1 \leq i \leq n$, todos os estabilizadores da ação de K sobre G/G_i à direita coincidem com a interseção de K com algum conjugado de G_i em G. Assim, pelo Teorema de Kurosh (Teorema 1.5.7), como K é finitamente gerado e estes estabilizadores são fatores livres deste mesmo, podemos concluir que estes também são topologicamente finitamente gerados, e nos encontramos nas hipóteses do Lema 3.2.4 para $H_1(G, [[\mathbb{F}_p(G/G_i)]])$. Como $H_1(K, \mathbb{F}_p)$ é finito, pela sequência (3.4) o mesmo vale para cada $H_1(G, [[\mathbb{F}_p(G/G_i)]])$. Aplicando o lema, podemos concluir que K age livremente sobre G/G_i exceto sobre um conjunto finito de órbitas para cada G_i.

Assim, $K \cap H$ também age livremente sobre G/G_i exceto sobre um conjunto finito de órbitas. Como $\mathrm{Ker}(\beta)$ é finito, apenas uma quantidade finita de $K \cap H$-órbitas em H/H_i é levada em uma K-órbita de G/G_i através da inclusão $H/H_i \hookrightarrow G/G_i$. Logo, podemos concluir também que $K \cap H$ também age livremente sobre H/H_i exceto sobre um conjunto finito de órbitas.

Como para K, os estabilizadores da ação de $K \cap H$ sobre H/H_i coincidem com a interseção de $K \cap H$ com algum conjugado hH_ih^{-1} de H_i em H. Uma vez que

$$K \cap H \cap hH_ih^{-1} = K \cap hH_ih^{-1} = (K \cap hG_ih^{-1}) \cap hH_ih^{-1}$$

e cada G_i satisfaz a propriedade de Howson, podemos concluir que estes estabilizadores são topologicamente finitamente gerados. Novamente aplicando o Lema 3.2.4, podemos concluir que $H_1(K \cap H, [[\mathbb{F}_p(H/H_i)]])$ é finito para todo $1 \leq i \leq n$.

Pela sequência (3.5), como o núcleo de σ é finito, podemos concluir que a imagem de $\bigoplus_{i=1}^n H_1(K \cap H, [[\mathbb{F}_p(H/H_i)]])$ em $H_1(K \cap H, \mathbb{F}_p)$ possui codimensão finita. Como provamos que este subespaço também é de dimensão finita, deduzimos que $H_1(K \cap H, \mathbb{F}_p)$ também é finito, de onde segue que $K \cap H$ é topologicamente finitamente gerado, como desejado. □

Agora, podemos enunciar e provar a versão pro-p do Teorema de Baumslag:

Teorema 3.2.6 ([SZ19, Teo. 1.9]). *Se G_1 e G_2 são dois grupos pro-p que satisfazem a propriedade de Howson, então seu produto pro-p livre $G_1 \coprod G_2$ também satisfaz a propriedade de Howson.*

Demonstração. Tendo em vista a Proposição 3.2.2, dados H e K subgrupos topologicamente finitamente gerados de $G = G_1 \coprod G_2$, podemos substituir G por um subgrupo aberto $U = \coprod_{i=1}^n U_i$ contendo H tal que $H = \coprod_{i=1}^n H_i$ com $H_i \leq_c U_i$. Temos que $U \cap K$ é um subgrupo topologicamente finitamente gerado de U, de forma que $H \cap (U \cap K) = H \cap K$. Assim, podemos aplicar o Lema 3.2.5 nos dando que $H \cap K$ é um subgrupo topologicamente finitamente gerado. □

Capítulo 4

Retração virtual e grupos de Marshall Hall

Seja $\mathcal{X}$ uma classe de grupos profinitos: dizemos que um grupo profinito G possui a propriedade de retração virtual para subgrupos em $\mathcal{X}$ se dado qualquer subgrupo fechado H de G tal que H está em $\mathcal{X}$, então existe um subgrupo aberto U de G contendo H e um homomorfismo $\tau\colon U \to H$ estendendo a identidade em H, isto é, $\tau_{|H} = \mathrm{Id}_H$. Neste caso, dizemos que H é uma retração de U. A existência de uma retração $\tau\colon U \to H$ é equivalente à existência de um subgrupo normal fechado $N \trianglelefteq_c U$ tal que $U \simeq N \rtimes H$, a saber, $N = \mathrm{Ker}(\tau)$.

Seguindo [SZ19], o primeiro objetivo deste capítulo é demonstrar, na Seção 4.1, que um grupo de Dëmushkin infinito G possui a propriedade de retração virtual para seus subgrupos fechados topologicamente finitamente gerados se $G \simeq \mathbb{Z}_p^2$ ou $d(G) \geq 3$, e na Seção 4.2 que esta propriedade é fechada para produtos pro-p livres finitos.

Dizemos que um grupo pro-p G é um *grupo de Marshall Hall* se todo subgrupo fechado H topologicamente finitamente gerado de G é virtualmente um fator livre, isto é, se existe um subgrupo aberto $U \leq_o G$ e um subgrupo fechado $Q \leq_c U$ tal que $U = H \coprod Q$. A propriedade de Marshall Hall é mais forte que a propriedade de retração virtual: se $U = H \coprod Q$, então a projeção de U em H induzida pela identidade em H e pelo homomorfismo trivial em Q é uma retração. Todo grupo finito satisfaz trivialmente a condição de Marshall Hall. O Teorema 1.5.4 nos mostra que todo grupo pro-p livre topologicamente finitamente gerado também é um grupo de Marshall Hall, e a Proposição 4.3.1 mostra que o único grupo de Dëmushkin que também é um grupo de Marshall Hall é o grupo finito $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

O último objetivo deste capítulo demonstrar que a classe dos grupos de Marshall Hall topologicamente finitamente gerados é composta pelos grupos obtidos pelos produtos pro-p livres de p-grupos finitos e grupos pro-p livres, seguindo também [SZ19].

4.1 Retração virtual em grupos de Dëmushkin

Para G um grupo de Dëmushkin pro-p, escrevemos $d(G) = n$ e $G = F/L$, onde F é o grupo pro-p livre em n geradores e L é o subgrupo fechado normal gerado por um elemento r em F_2 (relembremos que a série q-central de F é definida por $F_i = F_{i-1}^q[F_{i-1}, F]$ e $F_1 = F$). Se q é a ordem da torção em G^{ab}, tomamos $\kappa = \mathbb{F}_p$ e $R = \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ (notemos que κ é o corpo de resíduos de R se $q \neq 0$).

Primeiramente, observemos que o fato da restrição ser nula em dimensão 2 nos dá que para um subgrupo aberto U de G a imagem da restrição res_U^G em $H^1(U, \kappa)$ é isotrópica (Definição A.2.1). Se $q \neq 0$, denotemos por $\rho\colon H^1(G, R) \to H^1(G, \kappa)$ a redução módulo p. Seja $\chi_\sigma \in H^1(G, R)$ o elemento dado pelo Lema 2.3.3. Temos a seguinte proposição:

Proposição 4.1.1 ([SZ19, Cor. 2.13])**.** *Seja N um subespaço isotrópico de $H^1(G, \kappa) \simeq H^1(F, \kappa)$. Se $q \neq 0$, suponha que $\rho(\chi_\sigma) \in N$. Então, existe uma base $x_1, \cdots, x_n$ de F e elementos $\gamma, \delta \in \mathbb{Z}_p$ tais que*

$$r = x_1^\gamma[x_1, x_2]x_3^\delta[x_3, x_4]\cdots[x_{n-1}, x_n]$$

e que também satisfaça $\eta(x_{2i-1}) = 0$ para todo $1 \leq i \leq t$ e todo $\eta \in N$.

Demonstração. Pela Proposição A.2.3, existe uma base simplética $a_1, b_1, \cdots, a_t, b_t$ de $H^1(G, \kappa)$ tal que $b_1 = \rho(\chi_\sigma)$ se $q \neq 0$ e $N \subseteq \langle b_1, \cdots, b_t\rangle$. Pela Proposição A.1.5, podemos levantar esses vetores à uma base simplética $A_1, B_1, \cdots, A_t, B_t$ de $H^1(G, R)$ com $B_1 = \chi_\sigma$. Tomemos em F uma base dual $w_1, \cdots, w_n$ (notemos que w_{2i-1} é dual de A_i e w_{2i} é dual de B_i para todo $1 \leq i \leq t$). Pela Proposição 2.3.6, a relação r se escreve como:

$$r \equiv w_1^q[w_1, w_2]\cdots[w_{n-1}, w_n] \pmod{F_3}.$$

Pelo Teorema de Classificação dos Grupos de Dëmushkin (Teorema 2.3.9), como $n = 2t$ é par, existe uma base $x_1, \cdots, x_n$ de F e elementos γ, δ em $\mathbb{Z}_p$ tais que

$$r = x_1^\gamma[x_1, x_2]x_3^\delta[x_3, x_4]\cdots[x_{n-1}, x_n].$$

Além disso, temos que $x_i \equiv w_i \pmod{F_2}$ para todo $1 \leq i \leq n$, uma vez que o processo de correção na demonstração do Teorema 2.3.9 se dá por sucessivos termos da série q-central. Assim, temos que

$$b_j(x_{2i-1}) = b_j(w_{2i-1}) = \rho(B_j)(w_{2i-1}) = 0$$

pela escolha de w_{2i-1}, como desejado. □

Para aplicarmos essa proposição, precisamos garantir que χ_σ está na imagem da restrição. Seja agora $\chi\colon G \to \mathbb{U}_p^1$ a ação de G sobre seu invariante ciclotômico. Como q, pelo Teorema 2.3.13, é a maior potência de p tal que $\mathrm{Im}(\chi) \subseteq 1 + q\mathbb{Z}_p$, se $q \neq 0$ temos um homomorfismo τ de $\mathrm{Im}(\chi)$ em $(\kappa, +)$ dado por $1 + qz \mapsto z \pmod p$.

Um subgrupo aberto U de G também é um grupo de Dëmushkin com $d(U) = (d(G) - 2)[G\colon U] + 2$. Como $d(U)$ também é par, denotaremos seus invariantes por

$$q^U, \chi_\sigma^U, \chi^U, \tau^U$$

enquanto os invariantes de G serão denotados por

$$q^G, \chi_\sigma^G, \chi^G, \tau^G .$$

Notemos que $\chi^U = \chi^G_{|U}$. Então, vale o seguinte:

Lema 4.1.2 ([SZ19, Prop. 2.15])**.** *Seja K um subgrupo fechado de índice infinito (i.e., não-aberto) em G com $d(G) > d(K) + 2$ e suponha que $q^G = q(G) \neq 0$. Então, existe um subgrupo aberto próprio U de G contendo K tal que $\rho(\chi_\sigma^U) \in \mathrm{Im}(\mathrm{res}_U^G)$.*

Demonstração. Tomemos $g_1, g_2 \in G$ tais que $\mathrm{Im}(\chi^G) = \overline{\langle \chi^G(g_1), \chi^G(g_2)\rangle}$. Como $d(G) > d(K) + 2$, sabemos que o subgrupo fechado Q gerado por K, g_1 e g_2 é próprio, e portanto está contido em algum subgrupo aberto próprio U. Como $g_1, g_2 \in U$, vale que $\mathrm{Im}(\chi^U) = \mathrm{Im}(\chi^G)$. Disto, podemos concluir que $q^G = q^U$ e $\tau^G = \tau^U$.

Tendo em vista a fórmula do invariante ciclotômico χ^G dada pelo Teorema 2.3.13, deduzimos que $\tau^G \circ \chi^G = \chi_\sigma^G$ (e o mesmo para U). De fato, temos:

$$\tau^G(1+q) = 1, \text{ se } q \neq 2\,;$$

$$\tau^G((1+2^f)^{-1}) = -\tau^G(1+2^f) \equiv 0 \pmod 2\,;$$
$$\tau^G(3+4\beta) = \tau^G(1+2(1+2\beta)) = 1\,.$$

e portanto:

$$\rho(\chi_\sigma^U) = \tau^U \circ \chi^U = \tau^G \circ \chi^G_{|U} = \mathrm{res}_U^G(\tau^G \circ \chi^G) = \mathrm{res}_U^G(\chi_\sigma^G)\,. \qquad \square$$

Notemos que para $p \neq 2$, a hipótese do Lema 4.1.2 pode ser relaxada para $d(G) > d(K)+1$, uma vez que o subgrupo p-Sylow de $\mathbb{Z}_p^\times$ é sempre procíclico (e portanto $\mathrm{Im}(\chi^G)$ também é procíclica). Entretanto, isso não tem consequência sobre como aplicaremos o resultado, uma vez que no contexto do Teorema 4.1.4 poderemos tomar G com $d(G)$ arbitrariamente grande enquanto mantemos K fixo.

Lema 4.1.3 ([SZ19, Lem. 2.8])**.** *Um subgrupo finitamente gerado K de um grupo profinito G é uma retração de G se, e somente se, existe um homomorfismo $\lambda\colon G \to K/\Phi(K)$ estendendo o quociente de Frattini $\varphi\colon K \to K/\Phi(K)$, tal que existe $\mu\colon G \to K$ fazendo o seguinte diagrama comutar:*

$$\begin{tikzcd} & G \arrow[dl, dotted, "\mu"'] \arrow[d, "\lambda"] \\ K \arrow[r, "\varphi"'] & K/\Phi(K) \end{tikzcd}$$

Demonstração. Se $\tau\colon G \to K$ é uma retração, então podemos tomar $\lambda = \varphi \circ \tau$ e obtemos uma solução do diagrama com $\mu = \tau$. Seja então uma solução μ do diagrama acima, e faça $N = \mathrm{Ker}(\mu)$. Como μ estende φ, temos que $\mu(K)\Phi(K) = K$ e portanto μ restrita à K é sobrejetiva. Isto nos dá que $KN = G$. Como K é finitamente gerado, K é Hopfiano, e portanto $\mu_{|K}\colon K \to K$ é um isomorfismo. Isso garante que $K \cap N = \{1\}$, terminando a demonstração. □

Teorema 4.1.4 ([SZ19, Teo. 1.1])**.** *Seja G um grupo de Dëmushkin pro-p com número mínimo de geradores $d(G) = n \geq 3$, e seja K um subgrupo fechado finitamente gerado de G. Então, existe um subgrupo aberto U de G, contendo K, tal que K é uma retração de U.*

Demonstração. Se n é ímpar, então temos que $q = p = 2$ pela Proposição 2.3.4. Assim, se K for aberto, tomamos $U = K$, e se K possui índice infinito, então este está contido em algum subgrupo maximal G' de G, de forma que

$$d(G') = [G\colon G'](d(G) - 2) + 2 = 2n - 2$$

é par. Substituindo G por G', podemos assumir que n é par sem perda de generalidade.

Como $K/\Phi(K)$ é finito, existe um subgrupo aberto de G contendo K e estendendo o homomorfismo de Frattini. Novamente substituindo G por esse subgrupo aberto, podemos supor que existe $\theta\colon G \to K/\Phi(K)$ estendendo a aplicação natural $\varphi\colon K \to K/\Phi(K)$. Com uma última substituição de G por um subgrupo aberto, podemos garantir que $d(G) > d(K)+1$.

Pelo Lema 4.1.2, existe um subgrupo aberto próprio U de G, contendo K, tal que $\rho(\chi_\sigma^U) \in \mathrm{Im}(\mathrm{res}_U^G)$ se $q \neq 0$. Definimos $\lambda = \theta_{|U}\colon U \to K/\Phi(K)$ e

$$\lambda^* = \inf\nolimits_{K/\Phi(K)}^U\colon H^1(K/\Phi(K), \kappa) \to H^1(U, \kappa)\,.$$

Tomando N como $\mathrm{Im}(\lambda^*)$ se $q = 0$ ou como $\langle \mathrm{Im}(\lambda^*), \rho(\chi_\sigma^U)\rangle$ se $q \neq 0$, temos $\lambda^*(\eta) = \eta \circ \lambda = \mathrm{res}_U^G(\eta \circ \theta)$ e portanto N é um subespaço isotrópico de $H^1(U, \kappa)$ uma vez que está contido na imagem da restrição res_U^G.

Assim, podemos aplicar a Proposição 4.1.1 para U, nos fornecendo uma apresentação

$$U \simeq \langle x_1, \cdots, x_n \mid x_1^{\gamma}[x_1, x_2]x_3^{\delta}[x_3, x_4] \cdots [x_{n-1}, x_n] = 1 \rangle$$

tal que para todo $\eta \in H^1(K/\Phi(K), \kappa)$ e todo i com $1 \leq i \leq t$, temos:

$$\eta(\lambda(x_{2i-1})) = (\lambda^*\eta)(x_{2i-1}) = 0\,.$$

Como $\lambda(x_{2i-1})$ é aniquilado por todos os funcionais de $K/\Phi(K)$ como espaço vetorial sobre κ, concluímos que $\lambda(x_{2i-1}) = 0$ para todo $1 \leq i \leq t$. Assim, a função $\mu\colon U \to K$ que associa x_{2i-1} a 1 e x_{2i} a alguma escolha de elemento em $\varphi^{-1}(\lambda(x_{2i}))$ para todo i é um homomorfismo bem definido de U em K, pois satisfaz trivialmente a relação acima. Pela construção de μ, temos que $\varphi \circ \mu = \lambda$, e portanto K é uma retração de G pelo Lema 4.1.3. □

Uma versão para grupos de Dëmushkin não solúveis dos clássicos teoremas de Greenberg para grupos Fuchsianos ([Gre60]) segue como consequência natural da propriedade de retração virtual:

Proposição 4.1.5. *Sejam G um grupo de Dëmushkin com $d(G) \geq 3$ e H um subgrupo fechado finitamente gerado de G. Se H contém um subgrupo fechado não-trivial N tal que N é normal em G, então H é aberto em G.*

Demonstração. Pela propriedade de retração virtual (Teorema 4.1.4), existe um subgrupo aberto $U \leq_o G$ e um subgrupo fechado $K \trianglelefteq_c U$ tais que $U \simeq K \rtimes H$. Se K não for trivial, então tome elementos não-triviais $k \in K$ e $n \in N$. Uma vez que

$$(k, 1)(1, n)(k^{-1}, 1) = (knk^{-1}n^{-1}, n) \in \{1\} \rtimes N\,,$$

podemos concluir que n e k comutam. Assim, o subgrupo de U gerado por n e k é isomorfo a $\mathbb{Z}_p^2$ uma vez que $K \cap H = \{1\}$. Como todo subgrupo fechado não-trivial de G deve ser novamente Dëmushkin com número de geradores maior que ou igual a 3 ou pro-p livre, tal k não pode existir e portanto $K = \{1\}$, demonstrando que $H = U$ é aberto em G. □

Corolário 4.1.6. *Todo subgrupo normal fechado $N \trianglelefteq_c G$ não-trivial e finitamente gerado de um grupo de Dëmushkin G com $d(G) \geq 3$ é aberto em G.* □

Corolário 4.1.7. *O centro de todo grupo de Dëmushkin não solúvel é trivial.*

Demonstração. Como G não é solúvel, temos que $Z(G)$ possui índice infinito e portanto é cíclico ou trivial. Como $Z(G)$ é normal em G e finitamente gerado, $Z(G)$ é trivial pelo Corolário 4.1.6. □

Corolário 4.1.8. *Sejam G um grupo de Dëmushkin com $d(G) \geq 3$ e H um subgrupo fechado finitamente gerado de G. Se H intersecta todos os subgrupos fechados finitamente gerados não-cíclicos de G, então H é aberto em G.*

Demonstração. Novamente, a propriedade de retração virtual do Teorema 4.1.4 garante que existem subgrupos $U \leq_o G$ e $K \trianglelefteq_c U$ tais que $U \simeq K \rtimes H$. Pelo Corolário 4.1.6, temos que K ou é trivial ou é infinitamente gerado. Como K não é cíclico e $K \cap H = \{1\}$, temos que K deve ser trivial e portanto $H = U$ é aberto em G. □

Para completarmos a classificação, vamos estudar os casos onde temos $d(G) = 2$.

Proposição 4.1.9. *Seja G um grupo pro-p abeliano topologicamente finitamente gerado. Então G possui a propriedade de retração virtual para seus subgrupos fechados (que são todos finitamente gerados).*

Demonstração. Uma vez que G é abeliano e topologicamente finitamente gerado, sabemos que seu subgrupo de torção tor(G) é finito e portanto fechado. Assim, temos uma decomposição da forma $G \simeq \mathbb{Z}_p^n \times \text{tor}(G)$. Além disso, é evidente para todo subgrupo H de G que tor$(H) = \text{tor}(G) \cap H$. Assim, basta mostrarmos que para todo H existe um subgrupo aberto de G que retrai para seu fator livre-de-torção.

Podemos supor então, sem perda de generalidade, que G é livre-de-torção. Dado H um subgrupo fechado de G, tomemos U um subgrupo aberto de G para o qual existe um homomorfismo $\lambda\colon U \to H/\Phi(H)$ estendendo o homomorfismo de Frattini $\varphi\colon H \to H/\Phi(H)$. Como U é finitamente gerado e livre-de-torção, U é projetivo na categoria dos grupos pro-p abelianos. Assim, temos o diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd} & U \arrow[dl, dotted] \arrow[d, "\lambda"] \\ H \arrow[r, "\varphi"'] & H/\Phi(H) \end{tikzcd}$$

Isto significa, pelo Lema 4.1.3 que H é uma retração de U, como desejado. □

Exemplo 4.1.10. A hipótese de G ser pro-p na Proposição 4.1.9 não pode ser muito relaxada, como mostra o exemplo $G = \widehat{\mathbb{Z}}$ e $H = \prod_p p\mathbb{Z}_p$. O subgrupo H é fechado em G e procíclico. Se existisse um subgrupo aberto U de G que retraísse para H, teríamos $U \simeq U/H \times H$, porém U/H é um subgrupo aberto de $G/H \simeq \prod_p \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ e portanto contém um subgrupo isomorfo a $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ para algum primo p. Como G é livre-de-torção, obtemos uma contradição. ■

Proposição 4.1.11. *Se G é um grupo de Dëmushkin pro-p, 2-gerado e não-comutativo com $p \neq 2$, então G não possui a propriedade de retração virtual para seus subgrupos fechados topologicamente finitamente gerados.*

Demonstração. Os grupos de Dëmushkin 2-gerados e não comutativos são os grupos dados pelo Exemplo 2.1.8 (*cf.* Teorema 2.3.9). Existe um inteiro p-ádico invertível α tal que uma apresentação de G é

$$G \simeq \left\langle x, y \mid yxy^{-1} = x^{1+q\alpha} \right\rangle .$$

Em particular, o subgrupo fechado H gerado topologicamente por x em G é normal. Suponha, por contradição, que exista um subgrupo aberto U de G que retraia para H. Neste caso, existiria um subgrupo normal fechado N de U tal que $U \simeq N \rtimes H$. Como H é normal em G, H também seria normal em U, e portanto esta decomposição em produto semidireto se tornaria uma decomposição em produto direto: $U \simeq N \times H$. O isomorfismo $U/N \simeq H \simeq \mathbb{Z}_p$ mostra que $[U\colon N] = \infty$, isto é, $N \simeq \mathbb{Z}_p$ e portanto $U \simeq \mathbb{Z}_p^2$. Como U seria ao mesmo tempo um grupo abeliano livre-de-torção e um grupo dado por uma apresentação da forma

$$U = \left\langle a, b \mid a^{q(U)\beta}[a, b] = 1 \right\rangle$$

para algum $\beta \in \mathbb{Z}_p^\times$, poderíamos concluir que $q(U) = 0$. Isto seria uma contradição uma vez que $q(U) \geq q(G) > 0$, com a primeira desigualdade sendo consequência de que $\chi_U = (\chi_G)_{|U}$ seria um subgrupo aberto de $\mathrm{Im}(\chi_G) = 1 + q\mathbb{Z}_p$ (utilizamos aqui que $p \neq 2$). Logo, não existe subgrupo aberto em G que retraia para H. $\square$

Corolário 4.1.12. *Para p ímpar, um grupo de Dëmushkin pro-p infinito G satisfaz a propriedade de retração virtual para seus subgrupos fechados topologicamente finitamente gerados se, e somente se, $d(G) > 2$ ou $G \simeq \mathbb{Z}_p^2$.* $\square$

4.2 Retração virtual em produtos pro-p livres

Utilizando o Lema 3.2.1, provaremos que a propriedade de retração virutal para subgrupos fechados topologicamente finitamente gerados é preservada por produtos pro-p livres finitos:

Teorema 4.2.1 ([SZ19, Teo. 4.2])**.** *Sejam $G_1, \cdots, G_n$ grupos pro-p que satisfazem a propriedade de retração virtual para subgrupos fechados topologicamente finitamente gerados. Então $G = \coprod_{i=1}^n G_i$ também satisfaz a propriedade de retração virtual para subgrupos fechados topologicamente finitamente gerados.*

Demonstração. Seja H um subgrupo fechado de G topologicamente finitamente gerado, e V o subgrupo aberto de G dado pelo Lema 3.2.1. Relembremos a notação: a decomposição de Kurosh de H é dada por

$$H \simeq \left[\coprod_{i=1}^{n} \coprod_{u \in D_i} uG_iu^{-1} \cap H \right] \coprod F_H$$

onde D_i é um conjunto de representantes distintos das classes laterais duplas $H\backslash G/G_i$. Além disso, para cada subgrupo aberto U de V existe um conjunto D_i^U de representantes distintos das classes duplas $U\backslash G/G_i$ contendo D_i tal que a decomposição de Kurosh de U é dada por

$$U \simeq \left[\coprod_{i=1}^{n} \coprod_{u_{i,j}\in D_i^U} u_{i,j}G_iu_{i,j}^{-1} \cap U\right] \coprod F_U \,.$$

Também vale que $F_H \simeq \varprojlim_{U \trianglelefteq_o V} F_U$ induzida pelas inclusões $H \to U$.

Como G_i satisfaz a propriedade de retração virtual, para cada $1 \leq i \leq n$ e $u \in D_i$, existe um subgrupo aberto $U_{i,u}$ de V tal que $uG_iu^{-1} \cap H$ é uma retração de $uG_iu^{-1} \cap U_{i,u}$. Tomando

$$U = \bigcap_{i=1}^{n} \bigcap_{u\in D_i} U_{i,u}$$

obtemos um subgrupo aberto de V tal que todo $u_{i,j}G_iu_{i,j}^{-1} \cap U$ retrai sobre sobre $u_{i,j}G_iu_{i,j}^{-1} \cap H$, e basta acharmos $N \trianglelefteq_o U$ tal que F_N retraia sobre F_H.

O conjunto dos subgrupos abertos normais de U é cofinal no limite inverso $F_H \simeq \varprojlim_{U \trianglelefteq_o V} F_U$, e portanto temos que $F_H \simeq \varprojlim_{W \trianglelefteq_o U} F_W$. Agora, prosseguimos como na Proposição 3.2.2 e denotando $\pi_W \colon F_H \to F_W$ o homomorfismo do limite inverso tomamos $M \trianglelefteq_o U$ tal que $d(\pi_M(F_H)) = d(F_H)$. Pela propriedade Hopfiana (Proposição 1.1.4) o homomorfismo π_M é injetivo.

Aplicando a versão pro-p do Teorema de Marshall Hall (Teorema 1.5.4) ao grupo pro-p livre F_M, existe um subgrupo aberto R de F_M tal que $\pi_N(F_H)$ é um fator livre de R. Se N é a imagem inversa em M de R através da projeção canônica $M \to F_M$, temos o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{tikzcd}
H \arrow[rr, hook] \arrow[dd] & & N \arrow[r, hook] \arrow[dl] \arrow[dd] & M \arrow[dd] \\
& F_N \arrow[dr] & & \\
F_H \arrow[ur, hook, "\pi_N"] \arrow[rr, hook, shift left] & & R \arrow[ll, shift left] \arrow[r, hook] & F_M
\end{tikzcd}$$

Como $\pi_N(F_H)$ é uma retração de F_N (induzida pela retração de R sobre F_H), temos uma retração nos quocientes de Frattini $F_N/\Phi(F_N) \to \pi_N(F_H)/\Phi(\phi_N(F_H))$. Assim, $\Phi(\pi_N(F_H)) = \Phi(F_N) \cap \pi_N(F_H)$ e pelo Lema 1.5.3 podemos concluir que $\pi_N(F_H)$ é um fator livre de F_N. Uma vez que π_N coincide com a composição de homomorfismos injetivos

$F_H \to H \to N \to F_N$, temos que F_H é um fator livre de F_N pelo Lema 1.5.5. Em particular, F_H é uma retração de F_N. □

Corolário 4.2.2. *Sejam $G_1, \cdots, G_n$ grupos pro-p topologicamente finitamente gerados tais que cada G_i satisfaz uma das condições abaixo:*

(a) G_i é um grupo pro-p livre.

(b) G_i é abeliano.

(c) G_i é um grupo de Dëmushkin com $d(G) > 2$.

Então, $G = \coprod_{i=1}^{n} G_i$ satisfaz a propriedade de retração virtual para seus subgrupos fechados topologicamente finitamente gerados.

Demonstração. Isto é uma combinação do Teorema 1.5.4, da Proposição 4.1.9, do Corolário 4.1.12 e do Teorema 4.2.1. □

4.3 Grupos de Marshall Hall

Primeiramente, chamamos a atenção para algumas propriedades dos grupos de M. Hall. Se H é um subgrupo topologicamente finitamente gerado de um grupo de Marshall Hall G, então H também é um grupo de Marshall Hall. De fato, dado um subgrupo fechado topologicamente finitamente gerado K de H, podemos encontrar um subgrupo aberto $U \leq_o G$ tal que K seja fator livre de U. Então, o Teorema de Kurosh para subgrupos topologicamente finitamente gerados (Teorema 1.5.7) aplicado ao subgrupo $H \cap U$ de U nos fornece que $K = K \cap H \cap U$ é um fator livre de $H \cap U$.

Todo grupo G de Marshall Hall satisfaz a propriedade de retração virtual para seus subgrupos fechados topologicamente finitamente gerados, pois, dado um tal subgrupo H, a projeção $U \to H$ é uma retração de U sobre este subgrupo.

Diretamente das propriedades de hereditariedade dos grupos de Dëmushkin infinitos, podemos concluir o seguinte resultado, o qual deve ser comparado com o Corolário 5.5.8.

Proposição 4.3.1. *Seja G um grupo de Dëmushkin. Se G for infinito, então G não é um grupo de Marshall Hall.*

Demonstração. Se G é infinito, então G possui um subgrupo fechado, próprio, não-aberto e não-trivial H. Pelo Exemplo 1.3.11, H é pro-p livre. Se G fosse um grupo de Marshall-Hall, então existiria um subgrupo aberto U de G tal que $U \simeq H \coprod K$ para algum subgrupo fechado $K \leq_c U$. Como K estaria contido no núcleo da projeção $U \to H$, sabemos que K não seria aberto em U e portanto também seria um grupo pro-p livre. Pela Proposição 1.3.9, U seria um grupo de Dëmushkin, porém o produto livre de dois grupos pro-p livres é novamente um grupo pro-p livre, gerando uma contradição. Logo, não existe subgrupo aberto de G contendo H como um fator livre. $\square$

Nosso objetivo nesta seção é seguir os argumentos apresentados na Sec. 4.2 de [SZ19] para caracterizar a classe dos grupos de Marshall Hall topologicamente finitamente gerados. Primeiramente, vamos deduzir que esta classe é de fato fechada para produtos livres pro-p:

Teorema 4.3.2 ([SZ19, Teo. 4.2])**.** *Sejam $G_1, \cdots, G_n$ grupos de Marshall Hall pro-p. Então $G = \coprod_{i=1}^n G_i$ também é um grupo de Marshall Hall.*

Demonstração. A demonstração é virtualmente igual à feita para o Teorema 4.2.1. A única diferença está no seguinte passo: dado um subgrupo fechado H de G topologicamente finitamente gerado, o Lema 3.2.1 nos fornece um subgrupo aberto V de G tal que para todo aberto U de V sua decomposição de Kurosh é dada por

$$U \simeq \left[\coprod_{i=1}^{n} \coprod_{u_{i,j} \in D_i^U} u_{i,j} G_i u_{i,j}^{-1} \cap U\right] \coprod F_U \,,$$

onde D_i^U é conjunto de representantes distintos das classes duplas $U \backslash G / G_i$ estendendo um conjunto D_i de representantes distintos de $H \backslash G / G_i$ tais que $uG_iu^{-1} \cap H \neq \{1\}$ para todo $u \in D_i$.

Como G_i é um grupo de Marshall Hall, para cada $1 \leq i \leq n$ e $u \in D_i$ existe um subgrupo aberto $U_{i,u}$ de V tal que $uG_iu^{-1} \cap H$ é um fator livre de $uG_iu^{-1} \cap U_{i,u}$. Tomando

$$U = \bigcap_{i=1}^{n} \bigcap_{u \in D_i} U_{i,u} \,,$$

o Teorema de Kurosh para subgrupos abertos (Teorema 1.5.6) aplicado à $uG_iu^{-1} \cap U$ dentro de $uG_iu^{-1} \cap U_{i,u}$ nos fornece que $uG_iu^{-1} \cap H$ também é um fator livre do primeiro. Assim, obtemos um subgrupo aberto U de V para o qual $u_{i,j}G_iu_{i,j}^{-1} \cap H$ é um fator livre de $u_{i,j}G_iu_{i,j}^{-1} \cap U$ para todo $1 \leq i \leq n$ e $u_{i,j} \in D_i^U$. A demonstração agora prossegue como no Teorema 4.2.1 sem mais alterações. $\square$

Para mostrarmos agora que todo grupo de Marshall Hall topologicamente finitamente gerado se decompõe como produto pro-p livre de p-grupos finitos e grupos pro-p livres, basta mostrarmos que um grupo de Marshall Hall infinito, topologicamente finitamente gerado e livremente indecomponível, isto é, que não se decompõe em um produto pro-p livre de subgrupos não triviais, é isomorfo a $\mathbb{Z}_p$. Para isto, primeiro precisamos controlar a possível torção presente em tais grupos, o que faremos por meio do seguinte lema:

Lema 4.3.3 ([WZ17, Lem. 4.9 e Prop. 4.10])**.** *Todo grupo de Marshall Hall G possui um subgrupo finito maximal. Se G é topologicamente finitamente gerado, infinito e livremente indecomponível e Q é um subgrupo finito maximal não-trivial de G, então existe um subgrupo fechado, infinito e livremente indecomponível $K \leq_c G$ e um subgrupo aberto $R \leq_o K$ com índice $[K\colon R] = p$ tal que Q é um fator pro-p livre de R.*

Demonstração. Primeiramente, mostraremos a existência de um subgrupo finito maximal. Se H é um subgrupo finito não-trivial de G, pela propriedade de Marshall Hall existe um subgrupo aberto $U \leq_o G$ tal que $U = H \coprod L$ para algum subgrupo fechado $L \leq_c U$. Se M é um subgrupo finito de U contendo H, então o Teorema de Kurosh para subgrupos finitamente gerados (Teorema 1.5.7) garante que H é um fator livre de M. Logo, como produtos livres pro-p não-triviais são infinitos pela Proposição 1.5.1, devemos ter $M = H$, isto é, H é um subgrupo finito maximal de U.

Vamos agora mostrar que existe uma cota superior na ordem dos subgrupos finitos de G contendo H, implicando na existência de um subgrupo finito maximal de G contendo H. De fato, se M é um subgrupo finito de G contendo H, então $M \cap U$ é um subgrupo finito de U contendo H. Logo, $M \cap U = H$. Assim, temos

$$[R\colon H] = [RU\colon U] \leq [G\colon U]$$

e portanto

$$|R| = |H|[R\colon H] \leq |H|[G\colon U]\,,$$

como desejado.

Suponhamos agora que G seja um grupo de Marshall Hall topologicamente finitamente gerado, infinito e livremente indecomponível e que este possua um subgrupo finito maximal não-trivial Q. Pela propriedade de Marshall Hall, Q é virtualmente um fator livre e então podemos escolher um subgrupo aberto V de G contendo Q como fator livre tal que $[G\colon V]$ seja o menor possível. Como G é livremente indecomponível e infinito, temos que $V \neq G$, e portanto existe um subgrupo aberto U entre V e G tal que $[U\colon V] = p$.

Se U é dado por $\coprod_{i=1}^{n} U_i$ onde cada U_i é livremente indecomponível e topologicamente finitamente gerado, novamente o Teorema de Kurosh garante que Q é conjugado de algum subgrupo de um dos U_i. Assim, reordenando e trocando alguma das entradas por um conjugado (permitido pelo Lema 1.5.5), podemos supor que $Q \leq_c U_1$ e tomar $K = U_1$. Note que a inclusão $Q < K$ é estrita, uma vez que Q não é um fator livre de U (pois V é maximal para esta propriedade).

Como $Q \neq K$ e Q é um subgrupo finito maximal de G, sabemos que K é infinito. Então, por fim, tomemos $R = K \cap V$.

$$
\begin{tikzcd}
 & U = \coprod_{i=1}^{n} U_i \arrow[dl, no head] \arrow[dr, no head] & \\
V \arrow[dr, no head] & & K = U_1 \arrow[dl, no head] \\
 & R = K \cap V \arrow[d, no head] & \\
 & Q &
\end{tikzcd}
$$

Notemos primeiramente que $R \neq K$, pois se K estivesse contido em V, aplicando novamente o Teorema de Kurosh à K (pois K é topologicamente finitamente gerado), teríamos que Q é um fator livre de K; uma contradição, uma vez que K é infinito e livremente indecomponível. Assim, temos que

$$1 < [K\colon R] = [KV\colon V] \leq [U\colon V] = p\,.$$

Para concluirmos a demonstração, o Teorema de Kurosh aplicado ao subgrupo R de V garante que Q é um fator livre de R. □

Proposição 4.3.4 ([SZ19, Prop. 4.12])**.** *Se G é um grupo de Marshall Hall topologicamente finitamente gerado, infinito e livremente indecomponível, então G é livre-de-torção.*

Demonstração. Assumindo por contradição que G possua torção e passando a um subgrupo fechado também topologicamente finitamente gerado, infinito e livremente indecomponível, o Lema 4.3.3 nos fornece um subgrupo finito maximal Q e um subgrupo aberto R de G com $[G\colon R] = p$ tal que $R = Q \coprod L$ para algum subgrupo fechado $L \leq_c R$.

O Teorema 1.6.2 garante que existe um grafo de grupos pro-p finito e conexo $(\mathcal{G}, \Gamma)$ tal que $G \simeq \Pi_1(\mathcal{G}, \Gamma)$, $R \cap \mathcal{G}(e) = \{1\}$ para toda aresta $e \in E(\Gamma)$, e $Q = R \cap \mathcal{G}(v)$ para algum vértice $v \in V(\Gamma)$. Assim, tomemos um tal grafo de grupos com grafo subjacente Γ minimal.

Como

$$[\mathcal{G}(v)\colon Q] = [\mathcal{G}(v)R\colon R] \leq [G\colon R] = p\,,$$

o grupo $\mathcal{G}(v)$ deve ser finito e portanto igual a Q. Além disso, para toda aresta $e \in E(\Gamma)$ incidente em v temos que $\mathcal{G}(e) \leq \mathcal{G}(v) = Q \leq_c R$ e portanto $\mathcal{G}(e) = \{1\}$ uma vez que $R \cap \mathcal{G}(e) = \{1\}$.

Relembramos que uma aresta em um grafo finito Γ é uma ponte se a sua remoção aumenta o número de componentes conexas de Γ. Se e fosse uma ponte, então teríamos que $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \{e\}$ onde Γ_1 e Γ_2 são subgrafos conexos disjuntos. Denotemos por $\mathcal{G}_i$ a restrição de $\mathcal{G}$ a Γ_i. Como $\Pi_1(\mathcal{G}, \Gamma) = \Pi_1(\mathcal{G}_1, \Gamma_1) \coprod \Pi_1(\mathcal{G}_2, \Gamma_2)$, pela indecomponibilidade de G, o grupo fundamental da componente que não contém v deve ser trivial. Assim, teríamos $G \simeq \pi_1(\mathcal{G}_i, \Gamma_i)$ para algum i, contradizendo a minimalidade de Γ, e portanto e não pode ser uma ponte.

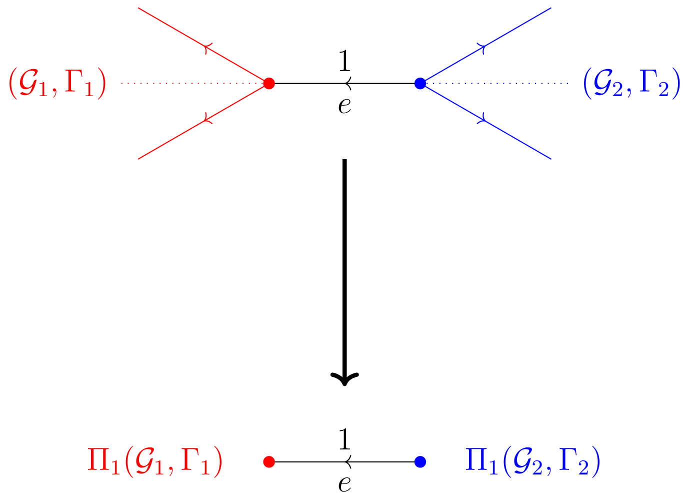

Figura 4.1 Se e é uma ponte, então os grupos fundamentais de ambos os grafos de grupos são isomorfos.

Como e não é uma ponte, então existe uma árvore de extensão em Γ que não contém a aresta e. Pela construção de $\Pi_1(\mathcal{G}, \Gamma)$ e o fato que $\mathcal{G}(e) = \{1\}$, podemos concluir que $\mathbb{Z}_p$ é um fator livre de G, também contradizendo sua indecomponibilidade. Logo, G não possui subgrupos de torção não-triviais, como queríamos demonstrar. $\square$

Agora podemos, por fim, classificar os grupos de Marshall Hall pro-p topologicamente finitamente gerados:

Teorema 4.3.5 ([SZ19, Teo. 1.6]). *Seja G um grupo de Marshall Hall pro-p topologicamente finitamente gerado. Então, temos que*

$$G \simeq \coprod_{i=1}^{n} G_i$$

onde cada G_i é um p-grupo finito ou um grupo pro-p livre.

Demonstração. Escreva $G \simeq \coprod_{i=1}^{n} G_i$ onde cada G_i é um grupo pro-p não-trivial topologicamente finitamente gerado e livremente indecomponível. Basta mostrarmos que se algum G_i for infinito, então temos $G_i \simeq \mathbb{Z}_p$.

Se G_i for infinito, então a Proposição 4.3.4 nos garante que G_i é livre-de-torção. Escolha K um subgrupo de G_i isomorfo a $\mathbb{Z}_p$ e seja U um subgrupo aberto de G_i contendo K como um fator livre. Uma vez que G_i é livremente indecomponível, pela versão pro-p do Teorema de Decomposição de Stallings (Corolário 1.6.3), devemos ter $U = K$. Como G_i é virtualmente $\mathbb{Z}_p$, podemos concluir que $G_i \simeq \mathbb{Z}_p$, por exemplo, pelo teorema principal de [Ser65] (*cf.* [Ser97, Prop. I.14']). $\square$

Capítulo 5

Desigualdade de Hanna Neumann

Como observamos no início do Capítulo 3, a Conjectura Forte de Hanna Neumann para um grupo pro-p G e subgrupos fechados topologicamente finitamente gerados $H, K \leq_c G$ é a cota:

$$\sum_{x \in H\backslash G/K} (\overline{d}(H \cap xKx^{-1}) - 1) \leq \overline{d}(H)\overline{d}(K)\,,$$

onde $\overline{d}(G) = \max\{d(G) - 1, 0\}$. Neste capítulo, demonstraremos a validade desta cota no caso em que G é um grupo de Dëmushkin não solúvel, seguindo [JZS19]. Combinando as técnicas deste artigo com alguns resultados de [AJZ20], também demonstraremos que toda retração H de um grupo de Dëmushkin G é inerte em G, isto é, vale $d(H \cap K) \leq d(K)$ para todo subgrupo fechado $K \leq_c G$.

A Seção 5.1 fornece um esboço da estratégia da demonstração, uma vez que esta essencialmente toma todo o capítulo. Além disto, em tal seção é estabelecida a finitude do lado esquerdo da desigualdade, bem como é demonstrada a falha desta quando G é um grupo de Dëmushkin com $d(G) = 2$.

Na Seção 5.2, definimos os gradientes homológicos dos G-módulos profinitos p-aniquilados e estabelecemos algumas de suas propriedades e suas conexões com a desigualdade de Hanna Neumann. A Seção 5.3 é dedicada a demonstrar a Conjectura de Atiyah para a álgebra de grupo $[[\mathbb{F}_p G]]$ onde G é um grupo de Dëmushkin, implicando na integralidade dos gradientes homológicos e na validade da conjectura de Kaplasnky sobre os divisores de zero da álgebra $[[\mathbb{F}_p G]]$.

Terminamos a demonstração da desigualdade na Seção 5.4, onde é demonstrado que o gradiente de relação $\beta_1^G(-)$ satisfaz uma submultiplicatividade para alguns módulos induzidos. Por fim, o capítulo se encerra na Seção 5.5, onde é demonstrada a inércia das retrações de G. A principal referência ao longo de todo o capítulo é [JZS19].

5.1 Desigualdade de Hanna Neumann e o invariante d

A desigualdade de Hanna Neumann para grupos de Dëmushkin pode ser enunciada como:

Teorema 5.1.1 ([JZS19, Teo. 1.1])**.** *Seja G um grupo de Dëmushkin com $d(G) > 2$, e sejam H e K dois subgrupos fechados e topologicamente finitamente gerados de G. Escolha um conjunto completo de representantes X das classes laterais duplas $H\backslash G/K$ em G e defina*

$$S = S(G, H, K) = \{x \in X \mid H \cap xKx^{-1} \neq \{1\}\} .$$

Então, o conjunto S é finito e temos que

$$\sum_{x \in S} \big(d(H \cap xKx^{-1}) - 1\big) \leq (d(H) - 1)\,(d(K) - 1) \ ,$$

onde o lado esquerdo não depende da escolha de representantes X.

Esboço da prova. Primeiramente, notemos que se x e y representam a mesma classe dupla em $H\backslash G/K$, então $H \cap xKx^{-1}$ e $H \cap yKy^{-1}$ são conjugados em G. Logo, a soma não depende da escolha de representantes X. A ideia para a finitude de S é dar uma interpretação homológica desta desigualdade. Para o lado esquerdo, temos

$$\dim_{\mathbb{F}_p} H_1(G, [[\mathbb{F}_p(H\backslash G)]] \,\widehat{\otimes}_{\mathbb{F}_p}\, [[\mathbb{F}_p(G/K)]]) = \sum_{x \in H\backslash G/K} d(H \cap xKx^{-1}) .$$

Essa igualdade é obtida ao notarmos que há um isomorfismo de H-módulos

$$[[\mathbb{F}_p(G/K)]] \simeq \bigsqcup_{x \in H\backslash G/K} [[\mathbb{F}_p(H/H \cap xKx^{-1})]] .$$

Utilizando a propriedade de Howson (Teorema 3.1.1) e reduzindo ao caso pro-p livre, é provado que o lado direito dessa soma é finito, ou seja, o conjunto S é finito.

Agora, para provar a desigualdade de Hanna Neumann, para cada G-módulo finitamente apresentado M é introduzido um número chamado gradiente de relação $\beta_1^G(M)$. Esse gradiente é monotônico tanto com respeito aos módulos quanto com respeito aos subgrupos de G, e para o caso H e K de índice infinito em G temos

$$\beta_1^G([[\mathbb{F}_p(H\backslash G)]]) = d(H) - 1 , \quad \beta_1^G([[\mathbb{F}_p(G/K)]]) = d(K) - 1 ,$$

$$\beta_1^G([[\mathbb{F}_p(H\backslash G)]] \,\widehat{\otimes}_{\mathbb{F}_p}\, [[\mathbb{F}_p(G/K)]]) = \sum_{x \in S} \big(d(H \cap xKx^{-1}) - 1\big) .$$

Desta forma, a desigualdade de Hanna Neumann pode ser obtida como consequência da submultiplicatividade do gradiente de relação com respeito a produtos tensoriais.

Esta submultiplicatividade é derivada da subaditividade (com respeito a sequências exatas curtas de G-módulos) e o fato de que os G-módulos envolvidos podem ser encaixados em uma sequência exata curta envolvendo um G-módulo para qual o gradiente de relação se anula. Este anulamento é devido aos módulos sobre G satisfazerem a conjectura de Atiyah. $\square$

Notemos que a condição $d(G) > 2$ é necessária.

Proposição 5.1.2. *Se G é um grupo de Dëmushkin com $d(G) = 2$, então existe um par de subgrupo fechados topologicamente finitamente gerados H e K de G tais que S é infinito. Além disso, também existe um par de subgrupos abertos U e W de G tais que S é finito porém*

$$\sum_{x \in S} \big(d(U \cap xWx^{-1}) - 1\big) > (d(U) - 1)\,(d(W) - 1)\ .$$

Demonstração. Para a primeira parte, seja φ a composição dos homomorfismos contínuos

$$G \to G^{\mathrm{ab}} \simeq \mathbb{Z}_p/q\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}_p$$

e tome $H = K = \mathrm{Ker}(\varphi)$. Como $d(G) = 2$ e $[G\colon H] = \infty$, H é um subgrupo pro-p livre solúvel e, portanto, procíclico. Em particular, H é topologicamente finitamente gerado. Como H é normal e $H\backslash G/K = H\backslash G/H \simeq G/H \simeq \mathbb{Z}_p$, podemos concluir que S é infinito.

Agora, sejam $U = W = \Phi(G)$. Pelo mesmo raciocínio, temos $S = G/\Phi(G)$ e portanto $|S| = p^2$. Além disso, note que

$$d(U) = d(W) = d(U \cap xWx^{-1}) = 2\,, \quad \forall x \in U\backslash G/W\,.$$

Portanto, temos que:

$$(d(U) - 1)\,(d(W) - 1) = 1 < p^2 = \sum_{x \in S} \big(d(U \cap xWx^{-1}) - 1\big)\ . \qquad \square$$

Além disso, no caso em que um dos subgrupos H ou K é aberto em G a desigualdade de Hanna Neumann pode ser obtida através das fórmulas do posto das Proposições 1.3.3 e 2.1.10.

Proposição 5.1.3. *Sejam G um grupo de Dëmushkin com $d(G) > 2$ e H e K subgrupos fechados topologicamente finitamente gerados de G. Se H ou K for aberto em G, então $H\backslash G/K$ é finito e, para qualquer escolha de conjunto completo de representantes X das classes laterais duplas $H\backslash G/K$ em G, temos que*

$$\sum_{x \in X} \big(d(H \cap xKx^{-1}) - 1\big) \leq (d(H) - 1)\,(d(K) - 1)\ .$$

Demonstração. Fixe X um conjunto completo de representantes X das classes laterais duplas $H\backslash G/K$ em G. Como os subgrupos $gHg^{-1} \cap K$ e $H \cap gKg^{-1}$ são conjugados para todo $g \in G$, podemos assumir que K é o subgrupo aberto em G. Assim, para todo $x \in X$ o subgrupo $H \cap xKx^{-1}$ é aberto em H e a desigualdade do posto (Corolário 1.3.4) garante que

$$d(H \cap xKx^{-1}) - 1 \leq [H\colon H \cap xKx^{-1}](d(H) - 1)\,.$$

Portanto, somando sobre X, obtemos:

$$\begin{aligned}\sum_{x\in X}\big(d(H \cap xKx^{-1}) - 1\big) &\leq \sum_{x\in X}[H\colon H \cap xKx^{-1}](d(H) - 1)\\ &= [G\colon K](d(H) - 1)\\ &= \frac{(d(K) - 2)}{(d(G) - 2)}(d(H) - 1)\,,\ \text{pela Proposição 2.1.10}\\ &\leq (d(K) - 2)(d(H) - 1)\\ &\leq (d(H) - 1)(d(K) - 1)\,.\end{aligned}$$

□

Vamos provar agora que, para um grupo de Dëmushkin G com $d(G) > 2$ e subgrupos fechados topologicamente finitamente gerados H e K de G, o conjunto

$$S = S(G, H, K) = \{x \in X \mid H \cap xKx^{-1} \neq \{1\}\}$$

é finito. Como grupos de Dëmushkin satisfazem a propriedade de Howson pelo Teorema 3.1.1, cada tal interseção é topologicamente finitamente gerada. Se H e K forem subgrupos fechados de um grupo pro-p livre topologicamente finitamente gerado F, então $S(F, H, K)$ é finito pela Proposição B.1.6 e pelo Corolário B.1.5. O mesmo se aplica se F for um grupo pro-p livre topologicamente gerado por um conjunto enumerável de geradores, uma vez que estes podem ser identificados com subgrupos fechados de grupos pro-p livres topologicamente finitamente gerados pela Prop. 8.6.3 de [RZ10]. Agora, precisaremos de um lema:

Lema 5.1.4 ([JZS19, Lem. 3.1 e Prop. 3.3])**.** *Sejam G um grupo de Dëmushkin com $d(G) > 2$ e T um subconjunto infinito de G.*

(a) Se A é um subgrupo fechado de G com $d(A) + 1 < d(G)$, então existe um subgrupo fechado $B \leq_c G$ com $[G\colon B] = \infty$ tal que B contém A e infinitos elementos de T.

(b) Se H e K são subgrupos de G topologicamente finitamente gerados e de índice infinito, então existe um subgrupo normal aberto $N \trianglelefteq_o G$ tal que

$$d(H \cap N) + d(K \cap N) + 1 < d(N)\,.$$

Demonstração. (a) Construiremos indutivamente uma sequência de subgrupos abertos $G_n \leq_o G$ e uma sequência de subgrupos fechados $A_n \leq_c G$ tais que $A_n \leq_c G_n$ e $d(A_n) + 1 < d(G_n)$, $T_n = T \cap G_n$ é infinito, A_n contém pelo menos n elementos de T e a sequência $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é estritamente decrescente, e a sequência $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é crescente, com respeito às inclusões.

Tome $G_0 = G$ e $A_0 = A$ e suponha que os subgrupos A_n e G_n estejam definidos. Para construir G_{n+1}, considere o conjunto

$$C_n = \{U \leq_o G_n \mid A_n \leq_c U \text{ e } [G_n \colon U] = p\}$$

dos subgrupos de índice p em G_n que contêm A_n. Como G_n é aberto em G, este é topologicamente finitamente gerado e, portanto, o conjunto C_n é finito (Prop. 2.5.1 de [RZ10]). Além disso, para todo $g \in G_n$, temos que

$$d(\langle A_n \cup \{g\}\rangle) \leq d(A_n) + 1 < d(G_n)$$

e portanto o subgrupo $\langle A_n \cup \{g\}\rangle$ de G_n é próprio e está contido em algum elemento de C_n, ou seja, os elementos de C_n formam uma cobertura de G_n. Logo, escolhemos $G_{n+1} \in C_n$ tal que $T_{n+1} = G_{n+1} \cap T$ seja infinito.

Uma vez que $A_n \subseteq G_{n+1}$, sabemos que $R_n = A_n \cap T = A_n \cap T_{n+1}$ e, por hipótese, este conjunto possui ao menos n elementos. Assim, se R_n for finito, escolha qualquer elemento $t \in T_{n+1} - R_n$ e defina $A_{n+1} = \langle A_n \cup \{t\}\rangle$. Como A_{n+1} contém R_n e t, podemos concluir que $\mid A_{n+1} \cap T \mid \geq n + 1$ como desejado. Caso R_n seja infinito, basta tomarmos $A_{n+1} = A_n$. De ambas as formas, temos que:

$$\begin{aligned} d(G_{n+1}) &= p\,(d(G_n) - 2) + 2\,, \text{ pela Proposição 2.1.10} \\ &\geq 2d(G_n) - 2\,, \text{ pois } p \geq 2 \\ &\geq d(G_n) + 1\,, \text{ pois } d(G_n) > d(G) > 2 \\ &> d(A_n) + 2 \\ &\geq d(A_{n+1}) + 1\,. \end{aligned}$$

Definimos então $B = \overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n}$. Como B está contido em todos os G_n e $[G \colon G_n] = p^n$, podemos concluir que $[G \colon B] = \infty$. Por fim, como $A_n \leq_c B$ para todo n, temos que $|B \cap T| > n$ para todo n, isto é, B contém infinitos elementos de T.

(b) Como $H = \bigcap HN$ e $K = \bigcap KN$ onde N percorre os subgrupos normais abertos de G e ambos H e K possuem índice infinito em G, sabemos que existe $N \trianglelefteq_o G$ que simultaneamente satisfaz:

$$[G\colon HN] \geq 2d(H)\,, \quad [G\colon KN] \geq 2d(K)\,.$$

Pela fórmula do posto da Proposição 1.3.3:

$$\begin{aligned} d(H \cap N) &= [H\colon H \cap N]\,(d(H) - 1) + 1\,, \text{ pois } H \text{ é pro-}p \text{ livre} \\ &= [HN\colon N]\,(d(H) - 1) + 1 \\ &= \frac{[G\colon N]\,(d(H) - 1)}{[G\colon HN]} + 1 \\ &= \frac{[G\colon N]d(H) - [G\colon N] + [G\colon HN]}{[G\colon HN]} \\ &\leq \frac{[G\colon N]d(H)}{[G\colon HN]} \\ &\leq \frac{[G\colon N]}{2}\,. \end{aligned}$$

Analogamente, também podemos concluir que $d(K \cap N) \leq \frac{[G\colon N]}{2}$ e portanto:

$$\begin{aligned} d(H \cap N) + d(K \cap N) + 1 &\leq [G\colon N] + 1 \\ &< [G\colon N](d(G) - 2) + 2\,, \text{ pois } d(G) > 2 \\ &= d(N)\,, \text{ pela Proposição 2.1.10.} \end{aligned}$$

□

Proposição 5.1.5 ([JZS19, Cor. 3.2 e Cor. 3.4]). *Sejam G um grupo de Dëmushkin, H e K dois subgrupos fechados topologicamente finitamente gerados de G e X um conjunto completo de representantes das classes laterais duplas $H\backslash G/K$ em G. Então, o conjunto*

$$S = S(G, H, K) = \{x \in X \mid H \cap xKx^{-1} \neq \{1\}\}$$

é finito e cada um dos subgrupos $H \cap xKx^{-1}$ com $x \in X$ é topologicamente finitamente gerado.

Demonstração. Isto é claro se H ou K forem abertos em G, então suponha que $[G\colon H] = [G\colon K] = \infty$. Pela parte (b) do Lema 5.1.4, tome N um subgrupo normal aberto de G tal que

$$d(H \cap N) + d(K \cap N) + 1 < d(N)\,.$$

Seja R um conjunto completo de representantes de $N\backslash G$ e para todo x em S escreva $x = nr_x$ com $n_x \in N$ e $r_x \in R$. Como G é livre-de-torção, temos que

$$H \cap xKx^{-1} \neq \{1\} \text{ se, e somente se, } H \cap xKx^{-1} \cap N \neq \{1\}$$

e portanto:

$$\begin{aligned} S(N, H\cap N, r_xKr_x^{-1}\cap N) &= \{n \in (H\cap N)\backslash N/(r_xKr_x^{-1}\cap N) \\ &\qquad \mid H \cap nr_xKr_x^{-1}n^{-1}\cap N \neq \{1\}\} \\ &= \{n \in (H\cap N)\backslash N/(r_xKr_x^{-1}\cap N) \\ &\qquad \mid H \cap nr_xKr_x^{-1}n^{-1} \neq \{1\}\} \\ &= S_{r_x} \end{aligned}$$

Desta forma, como

$$S = \bigcup_{r_x \in R} S_{r_x} \cdot r_x$$

basta mostrarmos cada S_{r_x} é finito, uma vez que R é finito. Além disso, como $(r_xKr_x^{-1}\cap N) = r_x(K\cap N)r_x^{-1}$, temos que

$$d(H\cap N) + d(r_xKr_x^{-1}\cap N) + 1 = d(H\cap N) + d(K\cap N) + 1 < d(N)$$

por hipótese.

Suponha então, por contradição, que algum S_{r_x} seja infinito. Aplicando a parte (a) do Lema 5.1.4 ao subgrupo $A = \langle H\cap N, r_xKr_x^{-1}\cap N\rangle$ de N, obtemos um subgrupo fechado $B \leq_c N$ tal que B contém $H\cap N$, $r_xKr_x^{-1}\cap N$ e infinitos elementos de S_{r_x}. Por um lado, temos

$$S_{r_x} \subseteq S(B, H\cap N, r_xKr_x^{-1}\cap N)\,.$$

Por outro lado, como $[N\colon B] = \infty$, o grupo B deve ser pro-p livre sobre um conjunto finito ou enumerável ([RZ10, Cor. 2.6.5]) e, portanto,

$$|S(B, H\cap N, r_xKr_x^{-1}\cap N)| < \infty$$

pela Proposição B.1.6 e pelo Corolário B.1.5. Assim, todos os conjuntos S_{r_x} são finitos e logo S também é finito. □

Corolário 5.1.6. *Sejam G um grupo de Dëmushkin com $d(G) > 2$ e H e K dois subgrupos fechados topologicamente finitamente gerados de G. Então:*

$$\dim_{\mathbb{F}_p} H_1(G, [[\mathbb{F}_p(H\backslash G)]]\,\widehat{\otimes}_{\mathbb{F}_p}\,[[\mathbb{F}_p(G/K)]]) = \sum_{x\in H\backslash G/K} d(H\cap xKx^{-1}) < \infty\,. \qquad \square$$

5.2 Os gradientes de posto e de relação

Para relacionarmos a soma do Corolário 5.1.6 com os termos que compõem a desigualdade de Hanna Neumann, introduzimos os seguintes gradientes:

Definição 5.2.1. Sejam G um grupo pro-p e M um $[[\mathbb{F}_p G]]$-módulo. Se M é finitamente gerado, definimos o *gradiente de posto* de M por

$$\beta_0^G(M) = \inf_{U \leq_o G} \frac{\dim_{\mathbb{F}_p} H_0(U, M)}{[G\colon U]}\,.$$

Se M é finitamente relacionado, isto é, se $H_1(G, M)$ possui dimensão finita sobre $\mathbb{F}_p$ (Definição B.1.2), definimos o *gradiente de relação* de M por

$$\beta_1^G(M) = \inf_{U \leq_o G} \frac{\dim_{\mathbb{F}_p} H_1(U, M)}{[G\colon U]}\,.$$

Note que $\beta_k^G(M)$ é sempre um número real não-negativo. Nossos objetivos nesta seção são exibir algumas de suas propriedades e demonstrar que ambos os lados da desigualdade de Hanna Neumann podem ser expressos em termos do gradiente de relação de módulos convenientes. Antes de enunciarmos mais propriedades dos gradientes, precisamos do seguinte lema:

Lema 5.2.2 ([JZS19, Lem. 4.2])**.** *Sejam G um grupo pro-p e M um $[[\mathbb{F}_p G]]$-módulo. Se $V \leq_o U$ são dois subgrupos abertos de G, então para todo $n \in \mathbb{N}$ vale que*

$$\frac{\dim_{\mathbb{F}_p} H_n(V, M)}{[G\colon V]} \leq \frac{\dim_{\mathbb{F}_p} H_n(U, M)}{[G\colon U]}\,.$$

Demonstração. Pela Proposição 1.2.5, o U-módulo $\operatorname{Ind}_V^U M$ possui uma filtração por U-submódulos de comprimento $[U\colon V]$ com quocientes isomorfos a M. Se $N \leq_c \operatorname{Ind}_V^U M$ é tal que $(\operatorname{Ind}_V^U M)/N \simeq M$, então a sequência exata longa

$$\cdots \to H_n(U, N) \to H_n(U, \operatorname{Ind}_V^U M) \to H_n(U, M) \to \cdots$$

nos fornece a desigualdade

$$\dim_{\mathbb{F}_p} H_n(U, \operatorname{Ind}_V^U M) \leq H_n(U, N) + H_n(U, M)\,.$$

Após repetirmos esse procedimento para todos os quocientes da filtração, obtemos a cota

$$\dim_{\mathbb{F}_p} H_n(U, \operatorname{Ind}_V^U M) \leq [U\colon V] \dim_{\mathbb{F}_p} H_n(U, M)\,.$$

Assim, temos que:

$$\begin{aligned}\frac{\dim_{\mathbb{F}_p} H_n(V,M)}{[G\colon V]} &= \frac{\dim_{\mathbb{F}_p} H_n(U,\operatorname{Ind}_U^G)}{[G\colon V]}\,,\ \text{pelo Isomorfismo de Shapiro}\\ &\leq \frac{[U\colon V]\dim_{\mathbb{F}_p} H_n(U,M)}{[G\colon V]} = \frac{\dim_{\mathbb{F}_p} H_n(U,M)}{[G\colon U]}\,.\end{aligned}$$ □

Como consequência do Lema 5.2.2, podemos concluir que $\beta_k^G(M)$ pode ser calculado utilizando qualquer família de subgrupos abertos de G que seja cofinal com a família de todos os subgrupos abertos. Em particular, podemos tomar o ínfimo apenas sobre os subgrupos abertos normais de G, ou sobre todos os subgrupos abertos de um dado subgrupo aberto fixo U.

Proposição 5.2.3. *Sejam G um grupo pro-p, U um subgrupo aberto de G e H um subgrupo fechado de G. São verdadeiras as afirmações:*

(a) [JZS19, Cor. 4.3] *Para todo $[[\mathbb{F}_pG]]$-módulo M cujo $\beta_k^G(M)$ está definido, temos $\beta_k^U(M) = [G\colon U]\beta_k^G(M)$.*

(b) [JZS19, Prop. 4.4] *Se M é um $[[\mathbb{F}_pH]]$-módulo cujo $\beta_k^H(M)$ está definido, então $\beta_k^G(\operatorname{Ind}_H^G M) = \beta_k^H(M)$.*

(c) [JZS19, Prop. 4.5] *Se*

$$0 \to M_1 \to M_2 \to M_3 \to 0$$

é uma sequência exata curta de $[[\mathbb{F}_pG]]$-módulos e M_1 e M_3 são ambos finitamente gerados (respectivamente, relacionados), então M_2 também é finitamente gerado (respectivamente, relacionado) e seu gradiente satisfaz:

$$\beta_k^G(M_2) \leq \beta_k^G(M_1) + \beta_k^G(M_3)\,.$$

(d) [JZS19, Prop. 4.5] *Se $M_2 \simeq M_1 \oplus M_3$ então $\beta_k^G(M_2) = \beta_k^G(M_1) + \beta_k^G(M_3)$.*

(e) [JZS19, Lem. 6.1] *Se M é um $[[\mathbb{F}_pG]]$-módulo finitamente gerado, então M é livre se, e somente se,*

$$\beta_0^G(M) = \dim_{\mathbb{F}_p} H_0(G,M)\,.$$

(f) [JZS19, Lem. 6.1] *Se M é um $[[\mathbb{F}_pG]]$-módulo finitamente apresentado e temos uma sequência exata curta*

$$0 \to N \to [[\mathbb{F}_pG]]^d \to M \to 0\,,$$

então o gradiente de relação de M satisfaz:

$$\beta_1^G(M) = \beta_0^G(N) - d + \beta_0^G(M)\,.$$

Demonstração. (a) Como os subgrupos abertos de U formam uma família cofinal com a família dos subgrupos abertos de G, temos:

$$\begin{aligned}
\beta_k^U(M) &= \inf_{V \leq_o U} \frac{\dim_{\mathbb{F}_p} H_k(V, M)}{[U\colon V]} \\
&= \inf_{V \leq_o U} \left([G\colon U] \cdot \frac{\dim_{\mathbb{F}_p} H_k(V, M)}{[G\colon V]} \right) \\
&= [G\colon U] \inf_{V \leq_o U} \frac{\dim_{\mathbb{F}_p} H_k(V, M)}{[G\colon V]} \\
&= [G\colon U]\beta_k^G(M)\,.
\end{aligned}$$

(b) Se V é um subgrupo normal aberto de G, então, para todo $[[\mathbb{F}_p VH]]$-módulo N, há um isomorfismo de $[[\mathbb{F}_p V]]$-módulos:

$$\operatorname{Res}_V^G \operatorname{Ind}_{VH}^G N = \bigoplus_{[G\colon VH]} \operatorname{Res}_V^{VH} N\,.$$

Portanto, utilizando a fórmula de classes duplas e o isomorfismo de Shapiro, obtemos:

$$\begin{aligned}
\frac{\dim_{\mathbb{F}_p} H_k(V, \operatorname{Ind}_H^G M)}{[G\colon V]} &= \frac{\dim_{\mathbb{F}_p} H_k(V, \operatorname{Ind}_{VH}^G \operatorname{Ind}_H^{VH} M)}{[G\colon V]} \\
&= \frac{\dim_{\mathbb{F}_p} H_k\left(V, \bigoplus_{[G\colon VH]} \operatorname{Res}_V^{VH} \operatorname{Ind}_H^{VH} M\right)}{[G\colon V]} \\
&= \frac{[G\colon VH] \cdot \dim_{\mathbb{F}_p} H_k(V, \operatorname{Res}_V^{VH} \operatorname{Ind}_H^{VH} M)}{[G\colon V]} \\
&= \frac{\dim_{\mathbb{F}_p} H_k(V, \operatorname{Res}_V^{VH} \operatorname{Ind}_H^{VH} M)}{[VH\colon V]} \\
&= \frac{\dim_{\mathbb{F}_p} H_k\left(V, \bigsqcup_{|H\backslash VH/V|} \operatorname{Ind}_{V\cap H}^V M\right)}{[VH\colon V]}\,, \text{ pela fórm. clas. duplas} \\
&= \frac{\dim_{\mathbb{F}_p} H_k(V, \operatorname{Ind}_{V\cap H}^V M)}{[VH\colon V]}\,, \text{ pois } |H\backslash VH/V| = 1 \\
&= \frac{\dim_{\mathbb{F}_p} H_k(V\cap H, M)}{[H\colon V\cap H]}\,, \text{ pelo Isomorfismo de Shapiro.}
\end{aligned}$$

Tomando o ínfimo sobre os subgrupos normais abertos de G e notando que $\{V \cap H \mid V \trianglelefteq_o G\}$ é cofinal na família dos subgrupos abertos de H, obtemos:

$$\beta_k^G(\operatorname{Ind}_H^G M) = \inf_{V \trianglelefteq_o G} \frac{\dim_{\mathbb{F}_p} H_k(V, \operatorname{Ind}_H^G M)}{[G\colon V]} = \inf_{V \trianglelefteq_o G} \frac{\dim_{\mathbb{F}_p} H_k(V \cap H, M)}{[H\colon V \cap H]} = \beta_k^H(M)\,.$$

(c) A sequência exata curta em questão induz a sequência exata longa

$$\cdots \to H_k(G, M_1) \to H_k(G, M_2) \to H_k(G, M_3) \to \cdots$$

e, portanto,

$$\dim_{\mathbb{F}_p} H_k(G, M_2) \le \dim_{\mathbb{F}_p} H_k(G, M_1) + \dim_{\mathbb{F}_p} H_k(G, M_3) < \infty\,.$$

Agora, tome um $\varepsilon > 0$ qualquer e para cada $1 \le i \le 3$, escolha K_i um subgrupo aberto de G tal que

$$\frac{\dim_{\mathbb{F}_p} H_k(K_i, M_i)}{[G\colon K_i]} \le \beta_k^G(M_i) + \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Tomando $K = K_1 \cap K_2 \cap K_3$, o Lema 5.2.2 garante que

$$\frac{\dim_{\mathbb{F}_p} H_k(K, M_i)}{[G\colon K]} \le \frac{\dim_{\mathbb{F}_p} H_k(K_i, M_i)}{[G\colon K_i]} \le \beta_k^G(M_i) + \frac{\varepsilon}{2}$$

para todo $1 \le i \le 3$. Assim:

$$\begin{aligned}
\beta_k^G(M_2) &\le \frac{\dim_{\mathbb{F}_p} H_k(K, M_2)}{[G\colon K]} \\
&\le \frac{\dim_{\mathbb{F}_p} H_k(K, M_1) + \dim_{\mathbb{F}_p} H_k(K, M_3)}{[G\colon K]} \\
&\le \beta_k^G(M_1) + \beta_k^G(M_3) + \varepsilon\,.
\end{aligned}$$

e como esta desigualdade vale para todo ε positivo, obtemos a cota desejada.

(d) Ainda mantendo ε e K como em (c), temos agora:

$$\begin{aligned}
\beta_k^G(M_2) &\ge \frac{\dim_{\mathbb{F}_p} H_k(K, M_2)}{[G\colon K]} - \varepsilon \\
&= \frac{\dim_{\mathbb{F}_p} H_k(K, M_1 \oplus M_3)}{[G\colon K]} - \varepsilon \\
&= \frac{\dim_{\mathbb{F}_p} H_k(K, M_1) + \dim_{\mathbb{F}_p} H_k(K, M_3)}{[G\colon K]} - \varepsilon \\
&\ge \beta_k^G(M_1) + \beta_k^G(M_3) - \varepsilon
\end{aligned}$$

Assim, como ε é qualquer real positivo, temos $\beta_k^G(M_2) \geq \beta_k^G(M_1) + \beta_k^G(M_3)$ e o resultado segue da desigualdade em (c).

(e) Mostraremos que a igualdade

$$\dim_{\mathbb{F}_p} H_0(U, M) = [G\colon U] \dim_{\mathbb{F}_p} H_0(G, M)$$

vale para todo subgrupo aberto $U \leq_o G$ se, e somente se, M for um $[[\mathbb{F}_p G]]$-módulo livre. Se $M \simeq [[\mathbb{F}_p G]]^d$ for livre, então para todo subgrupo aberto $U \leq_o G$ temos $[[\mathbb{F}_p U]]$-isomorfismos:

$$M \simeq \bigoplus_d [[\mathbb{F}_p G]] \simeq \bigoplus_d \bigoplus_{[G\colon U]} [[\mathbb{F}_p U]]$$

e, portanto, a igualdade desejada é verdadeira.

Suponhamos, agora, que a igualdade vale para todo subgrupo aberto $U \leq_o G$ e encaixe M em uma sequência exata curta

$$0 \to N \to [[\mathbb{F}_p G]]^d \to M \to 0$$

onde $d = \dim_{\mathbb{F}_p} H_0(G, M)$. A sequência exata longa induzida

$$\cdots \to H_0(U, N) \xrightarrow{\varphi} H_0(U, [[\mathbb{F}_p G]]^d) \xrightarrow{\pi} H_0(U, M) \to 0$$

assegura que $\pi\colon H_0(U, [[\mathbb{F}_p G]]^d) \to H_0(U, M)$ é sempre sobrejetora, e contando dimensões a hipótese sobre M garante que π é um isomorfismo para todo U. Assim, para todo subgrupo aberto $U \leq_o G$, a aplicação $\varphi\colon H_0(U, N) \to H_0(U, [[\mathbb{F}_p G]]^d)$ é identicamente nula.

Identificando $H_0(U, N) \simeq N_U$ e $H_0(U, [[\mathbb{F}_p G]]^d) \simeq [[\mathbb{F}_p(G/U)]]^d$, podemos concluir que N está contido no núcleo de todas as projeções canônicas $[[\mathbb{F}_p G]]^d \to [[\mathbb{F}_p(G/U)]]^d$. Como $[[\mathbb{F}_p G]]^d = \varprojlim_{U \leq_o G} [[\mathbb{F}_p(G/U)]]^d$, concluímos que N é trivial, isto é, $M \simeq [[\mathbb{F}_p G]]^d$ é um $[[\mathbb{F}_p G]]$-módulo livre.

(f) Para todo subgrupo aberto $U \leq_o G$, a sequência exata curta em questão induz a sequência exata longa na homologia

$$\cdots \to H_1(U, [[\mathbb{F}_p G]]^d) \to H_1(U, M) \to H_0(U, N) \to H_0(U, [[\mathbb{F}_p G]]^d) \to H_0(U, M) \to 0$$

onde $H_1(U, [[\mathbb{F}_p G]]^d) = 0$, pois $[[\mathbb{F}_p G]]^d$ é um $[[\mathbb{F}_p U]]$-módulo livre. Somando alternadamente as dimensões, dividindo por $[G\colon U]$ e notando que há um isomorfismo de $[[\mathbb{F}_p U]]$-módulos

$$[[\mathbb{F}_p G]]^d \simeq \bigoplus_d \bigoplus_{[G\colon U]} [[\mathbb{F}_p U]]$$

obtemos as igualdades:

$$\frac{\dim_{\mathbb{F}_p} H_1(U,M)}{[G\colon U]} = \frac{\dim_{\mathbb{F}_p} H_0(U,N)}{[G\colon U]} - d + \frac{\dim_{\mathbb{F}_p} H_0(U,M)}{[G\colon U]}\,.$$

Assim, a igualdade desejada segue ao tomarmos o ínfimo sobre todos os subgrupos abertos U de G da igualdade acima. □

Agora, podemos calcular os gradientes de relação para os módulos de interesse:

Proposição 5.2.4 ([JZS19, Cor. 4.7])**.** *Seja G um grupo de Dëmushkin com $d(G) > 2$ e sejam H e K subgrupos fechados de G topologicamente finitamente gerados com índice infinito. Então:*

$$\beta_1^G([[\mathbb{F}_p(H\backslash G)]]) = d(H) - 1\,, \quad \beta_1^G([[\mathbb{F}_p(G/K)]]) = d(K) - 1\,,$$

$$\beta_1^G([[\mathbb{F}_p(H\backslash G)]] \mathbin{\widehat{\otimes}_{\mathbb{F}_p}} [[\mathbb{F}_p(G/K)]]) = \sum_{x \in S(G,H,K)} \left(d(H \cap xKx^{-1}) - 1\right)\,.$$

Demonstração. Se $H = \{1\}$, isto é claro. Se H não for trivial, como H é pro-p livre, temos:

$$\begin{aligned}
\beta_1^G([[\mathbb{F}_p(H\backslash G)]]) &= \beta_1^G(\operatorname{Ind}_H^G \mathbb{F}_p) \\
&= \beta_1^H(\mathbb{F}_p)\,, \text{ pela parte (c) da Proposição 5.2.3} \\
&= \inf_{U \le_o H} \frac{\dim_{\mathbb{F}_p} H_1(U)}{[H\colon U]} \\
&= \inf_{U \le_o H} \frac{d(U)}{[H\colon U]} \\
&= \inf_{U \le_o H} \frac{[H\colon U](d(H)-1)+1}{[H\colon U]}\,, \text{ pela fórmula do posto} \\
&= d(H) - 1 + \inf_{U \le_o H} \frac{1}{[H\colon U]}\,, \text{ pois } H \text{ é infinito} \\
&= d(H) - 1\,.
\end{aligned}$$

Analogamente, temos que $\beta_1^G([[\mathbb{F}_p(G/K)]]) = d(K) - 1$. Agora, o Corolário 5.1.6 e o isomorfismo de Shapiro garantem que $[[\mathbb{F}_p(G/K)]]$ é um $[[\mathbb{F}_pH]]$-módulo finitamente relacionado. Assim, uma vez que

$$\beta_1^G([[\mathbb{F}_p(H\backslash G)]] \mathbin{\widehat{\otimes}_{\mathbb{F}_p}} [[\mathbb{F}_p(G/K)]]) = \beta_1^H([[\mathbb{F}_p(G/K)]])\,,$$

escolhendo um conjunto completo de representantes X das classes laterais duplas $H\backslash G/K$ em G e aplicando os itens da Proposição 5.2.3 obtemos:

$$\begin{aligned}
\beta_1^H([[\mathbb{F}_p(G/K)]]) &= \beta_1^H\left(\bigsqcup_{x\in X}[[\mathbb{F}_p(H/H\cap xKx^{-1})]]\right)\\
&= \beta_1^H\left(F\sqcup\bigsqcup_{x\in S(G,H,K)}[[\mathbb{F}_p(H/H\cap xKx^{-1})]]\right)\\
&= \beta_1^H(F)+\sum_{x\in S(G,H,K)}\beta_1^H([[\mathbb{F}_p(H/H\cap xKx^{-1})]])\,,\ \text{por (d)}\\
&= \sum_{x\in S(G,H,K)}\beta_1^H([[\mathbb{F}_p(H/H\cap xKx^{-1})]])\,,\ \text{pois } F \text{ é } [[\mathbb{F}_pH]]\text{-livre}\\
&= \sum_{x\in S(G,H,K)}\beta_1^{H\cap xKx^{-1}}(\mathbb{F}_p)\,,\ \text{por (b)}\\
&= \sum_{x\in S(G,H,K)}\left(d(H\cap xKx^{-1})-1\right)\,,\ \text{pois } H\cap xKx^{-1} \text{ é pro-}p \text{ livre.}\square
\end{aligned}$$

5.3 Conjectura de Atiyah

A afirmação de que $\beta_0^G(M)$ é um número inteiro quando G é um grupo pro-p livre-de-torção e M é um $[[\mathbb{F}_pG]]$-módulo finitamente gerado é conhecida como uma das formas da conjectura de Atiyah. Essa conjectura foi provada no caso particular em que G é analítico p-ádico topologicamente finitamente gerado por M. Harris (Teo. 1.10 de [Har79] e sua correção em [Har00]). Uma demonstração alternativa completa é dada em [BLLS14, Teo. 2.1]. Enunciaremos aqui, sem prova, uma versão mais fraca do resultado de Harris, porém, suficiente para nossos propósitos:

Teorema 5.3.1 (Harris)**.** *Se G é um grupo pro-p analítico p-ádico livre-de-torção topologicamente finitamente gerado e M é um $[[\mathbb{F}_pG]]$-módulo finitamente gerado. Então, vale que*

$$\beta_0^G(M)=\inf_{U\trianglelefteq_o G}\frac{\dim_{\mathbb{F}_p}H_0(U,M)}{[G\colon U]}$$

é um número inteiro.

Além disso, a validade da conjectura de Atiyah para um grupo pro-p G livre-de-torção também implica na integralidade do gradiente de relação $\beta_1^G(M)$:

Proposição 5.3.2 ([JZS19, Prop. 5.4])**.** *Seja G um grupo pro-p livre-de-torção para o qual a conjectura de Atiyah é verdadeira, e seja M um $[[\mathbb{F}_pG]]$-módulo finitamente apresentado. Então, $\beta_1^G(M)$ é um número inteiro.*

Demonstração. Pela parte (f) da Proposição 5.2.3 temos que

$$\beta_1^G(M) = \beta_0^G(K) - d + \beta_0^G(M)$$

é um número inteiro. $\square$

Nesta seção, utilizaremos o Teorema 5.3.1 para mostrarmos que grupos de Dëmushkin satisfazem a conjectura de Atiyah e portanto $\beta_1^G(M)$ é um inteiro para todo $[[\mathbb{F}_pG]]$-módulo finitamente apresentado M. Isto é consequência do seguinte fato:

Teorema 5.3.3 ([JZS19, Cor. 5.5])**.** *Todo grupo pro-p topologicamente finitamente gerado e residualmente analítico p-ádico livre-de-torção satisfaz a conjectura de Atiyah.*

Demonstração. Sejam G um tal grupo e M um $[[\mathbb{F}_pG]]$-módulo finitamente gerado. Pela Prop. 2.5.1 de [RZ10], como G é topologicamente finitamente gerado, existe uma sequência $\{G_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ de subgrupos abertos de G formando um sistema fundamental de vizinhanças da unidade. Além disso, como G é residualmente analítico p-ádico livre-de-torção, existe uma sequência $\{\Omega_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ de subgrupos normais fechados de G tais que G/Ω_i é analítico p-ádico livre-de-torção e $\bigcap_{i=0}^{\infty}\Omega_i = \{1\}$. Como M/Ω_k é um $[[\mathbb{F}_p(G/\Omega_k)]]$-módulo finitamente gerado, para todo $k\in\mathbb{N}$ existe um inteiro $z_k\in\mathbb{Z}$ tal que $\beta_0^{G/\Omega_k}(M_{\Omega_k}) = z_k$ pelo Teorema 5.3.1.

Vamos indutivamente construir uma sequência de subgrupos abertos $\{U_i\}_{i\in\mathbb{N}}$. Definamos $U_0 = G_0$ e suponha que U_i já está definido para $i<n$. Temos que, como U_{n-1} e G_n são ambos abertos em G, a parte (a) da Prop. 2.1.5 de [RZ10] garante que para algum $k\in\mathbb{N}$ o subgrupo Ω_k está contido em $U_{n-1}\cap G_n \leq_o G$. Assim, escolha para U_n algum subgrupo aberto de $U_{n-1}\cap G_n$ contendo Ω_k tal que

$$\frac{1}{n} \geq \left|\frac{\dim_{\mathbb{F}_p} H_0(U_n/\Omega_k, M_{\Omega_k})}{[G/\Omega_k\colon U_n/\Omega_k]} - z_k\right| = \left|\frac{\dim_{\mathbb{F}_p} H_0(U_n, M)}{[G\colon U_n]} - z_k\right| .$$

Como $U_i\subseteq G_i$ para todo i, sequência $\{U_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ é cofinal em relação a sequência $\{G_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ e portanto

$$\beta_0^G(M) = \inf_{n\geq 0}\frac{\dim_{\mathbb{F}_p} H_0(U_n, M)}{[G\colon U_n]} .$$

Pelo Lema 5.2.2, a sequência $\frac{\dim_{\mathbb{F}_p} H_0(U_n,M)}{[G\colon U_n]}$ é monótona não-crescente. Desta forma, o ínfimo do lado direito da equação é igual ao limite desta sequência. Desta forma:

$$0 \leq d(\beta_0^G(M),\mathbb{Z}) = \lim_{n\to\infty} d\left(\frac{\dim_{\mathbb{F}_p} H_0(U_n, M)}{[G\colon U_n]},\mathbb{Z}\right) \leq \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$$

e assim $\beta_0^G(M)$ é um inteiro, como desejado. $\square$

Corolário 5.3.4. *Todo grupo de Dëmushkin infinito G satisfaz a conjectura de Atiyah. Para todo $[[\mathbb{F}_pG]]$-módulo finitamente apresentado M os gradientes $\beta_k^G(M)$ são números inteiros.*

Demonstração. Pela Proposição 2.3.10, G é residualmente poliprocíclico livre-de-torção. Em particular, G é residualmente analítico p-ádico livre-de-torção. Portanto, a conjectura de Atiyah vale para G pelo Teorema 5.3.3. A segunda parte é então consequência da Proposição 5.3.2. □

Corolário 5.3.5 ([JZS19, Cor. 6.2])**.** *Se G é um grupo pro-p livre-de-torção que satisfaz a conjectura de Atiyah e M é um $[[\mathbb{F}_pG]]$-módulo finitamente gerado 1-relacionado, então $\beta_1^G(M) = 0$.*

Demonstração. Pelas hipóteses sobre M, existe uma sequência exata curta de $[[\mathbb{F}_pG]]$-módulos

$$0 \to C \to [[\mathbb{F}_pG]]^d \to M \to 0$$

com $\dim_{\mathbb{F}_p} H_0(G, C) = 1$ e $\dim_{\mathbb{F}_p} H_0(G, M) = d$. A parte (f) da Proposição 5.2.3 assegura também que

$$\beta_1^G(M) = \beta_0^G(C) - d + \beta_0^G(M)\,.$$

Como M não é um $[[\mathbb{F}_pG]]$-módulo livre, a parte (e) da Proposição 5.2.3 nos garante que $\beta_0^G(M) < \dim_{\mathbb{F}_p} H_0(G, M)$. Como G satisfaz a conjectura Atiyah, o gradiente de posto de M é um número inteiro. Assim, esta desigualdade é equivalente a $\beta_0^G(M) \leq \dim_{\mathbb{F}_p} H_0(G, M) - 1$. Portanto:

$$\begin{aligned} 0 \leq \beta_1^G(M) &= \beta_0^G(C) - d + \beta_0^G(M) \\ &\leq \beta_0^G(C) - d + \dim_{\mathbb{F}_p} H_0(G, M) - 1 \\ &= \beta_0^G(C) - 1\,, \text{ pois } \dim_{\mathbb{F}_p} H_0(G, M) = d \\ &\leq \dim_{\mathbb{F}_p} H_0(G, C) - 1 \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

□

O corolário abaixo é um caso particular da conjectura de Kaplansky sobre os divisores de zero em anéis de grupos sobre grupos livre-de-torção (Prob. 6 em [Kap70]).

Corolário 5.3.6 ([JZS19, Cor. 6.3])**.** *Seja G um grupo pro-p livre-de-torção que satisfaz a conjectura de Atiyah. Então, $[[\mathbb{F}_pG]]$ é um domínio, isto é, $[[\mathbb{F}_pG]]$ não possui divisores de zero.*

Demonstração. Se $b \in [[\mathbb{F}_pG]]$ é invertível, então para todo $a \in [[\mathbb{F}_pG]]$ não nulo temos que $(ab)b^{-1} = a \neq 0$ e, deste modo, $ab \neq 0$. Se $b \neq 0$ não é invertível, então o fecho C do ideal principal gerado por b em $[[\mathbb{F}_p G]]$ é um ideal próprio deste anel. Como $H_0(G, C) = C/((IG))C \simeq \mathbb{F}_p$, temos que o $[[\mathbb{F}_p G]]$-módulo $M = [[\mathbb{F}_p G]]/C$ é 1-relacionado.

Como M não é $[[\mathbb{F}_p G]]$-livre, a parte (e) da Proposição 5.2.3 nos garante que $\beta_0^G(M) < \dim_{\mathbb{F}_p} H_0(G, M) = 1$. Como $\beta_0^G(M)$ é um número inteiro, podemos concluir que $\beta_0^G(M) = 0$. Desta forma:

$$\begin{aligned} \beta_0^G(C) &= \beta_1^G(M) + 1 - \beta_0^G(M)\,, \text{ pela parte (f) da Proposição 5.2.3} \\ &= \beta_1^G(M) + 1\,, \text{ pois } \beta_0^G(M) = 0 \\ &\geq 1 = \dim_{\mathbb{F}_p} H_0(G, C)\,. \end{aligned}$$

Assim, temos que $\beta_0^G(C) = \dim_{\mathbb{F}_p} H_0(G, C)$. Portanto, pela parte (e) da Proposição 5.2.3, o $[[\mathbb{F}_p G]]$-módulo C é livre. Disto conclui-se que seu anulador $\mathrm{Ann}_{[[\mathbb{F}_p G]]}(C)$ é trivial. □

5.4 Submultiplicatividade

Pela Proposição 5.2.4, a desigualdade de Hanna Neumann pode ser obtida como consequência de uma submultiplicatividade no gradiente de relação:

$$\beta_1^G([[\mathbb{F}_p(H\backslash G)]] \,\widehat{\otimes}_{\mathbb{F}_p} [[\mathbb{F}_p(G/K)]]) \leq \beta_1^G([[\mathbb{F}_p(H\backslash G)]])\beta_1^G([[\mathbb{F}_p(G/K)]])\,.$$

Antes de estabelecermos essa desigualdade, precisamos de alguns lemas.

Lema 5.4.1 ([JZS19, Lem. 7.1])**.** *Se G é um grupo pro-p e H é um subgrupo pro-p livre fechado de G, então para todo $[[\mathbb{F}_p G]]$-módulo M finitamente relacionado como $[[\mathbb{F}_p H]]$-módulo existe um $[[\mathbb{F}_p G]]$-submódulo aberto $M_0 \leq_o M$ tal que $\beta_1^H(M_0) = 0$.*

Demonstração. Uma vez que $M = \varprojlim M/M_i$ onde M_i percorrem os $[[\mathbb{F}_p G]]$-submódulos abertos de M, temos que $H_1(H, M) \simeq \varprojlim H_1(H, M/M_i)$. Como $H_1(H, M)$ é finito, existe um $[[\mathbb{F}_p G]]$-submódulo aberto $M_0 \leq_o M$ tal que o homomorfismo induzido $\psi\colon H_1(H, M) \to H_1(H, M/M_0)$ é injetivo. Portanto, a sequência exata curta

$$0 \to M_0 \to M \to M/M_0 \to 0$$

induz a sequência exata longa

$$\cdots \to H_2(H, M/M_0) \xrightarrow{\theta} H_1(H, M_0) \xrightarrow{\varphi} H_1(H, M) \xrightarrow{\psi} H_1(H, M/M_0) \to \cdots\,.$$

Como ψ é injetiva, temos que φ é identicamente nula. Assim, θ deve ser sobrejetiva. Porém, uma vez que H é pro-p livre, $H_2(H, M/M_0)$ se anula. Logo, temos que $H_1(H, M_0)$

também deve ser 0. Portanto,

$$0 \leq \beta_1^H(M_0) \leq \dim_{\mathbb{F}_p} H_1(H, M_0) = 0$$

como desejado. $\square$

Lema 5.4.2 ([JZS19, Prop. 7.2])**.** *Sejam G um grupo de Dëmushkin infinito e H um subgrupo fechado topologicamente finitamente gerado de G. Então, $[[\mathbb{F}_p(G/H)]]$ possui um $[[\mathbb{F}_pG]]$-submódulo aberto M com $\beta_1^G(M) = 0$.*

Demonstração. Como $[[\mathbb{F}_p(G/H)]]$ é finitamente apresentado como $[[\mathbb{F}_pG]]$-módulo, temos que $H_1(G, [[\mathbb{F}_p(G/H)]]$ é finito. Além disso, $[[\mathbb{F}_p(G/H)]] = \varprojlim [[\mathbb{F}_p(G/U)]]$ onde U percorre os subgrupos abertos de G contendo H. Assim, existe um subgrupo aberto $U \leq_o G$ tal que o homomorfismo induzido $H_1(G, [[\mathbb{F}_p(G/H)]]) \to H_1(G, [[\mathbb{F}_p(G/U)]])$ é injetivo. Definamos então M como o núcleo da projeção $[[\mathbb{F}_p(G/H)]] \to [[\mathbb{F}_p(G/U)]]$.

Assim, como no Lema 5.4.1, na sequência exata longa

$$\begin{aligned}\cdots \to H_2(G, [[\mathbb{F}_p(G/U)]]) \to & H_1(G, M) \to H_1(G, [[\mathbb{F}_p(G/H)]]) \\ & \to H_1(G, [[\mathbb{F}_p(G/U)]]) \to \cdots\end{aligned}$$

podemos concluir que o homomorfismo $H_2(G, [[\mathbb{F}_p(G/U)]]) \to H_1(G, M)$ é sobrejetivo. Portanto:

$$\begin{aligned}\dim_{\mathbb{F}_p} H_1(G, M) &\leq \dim_{\mathbb{F}_p} H_2(G, [[\mathbb{F}_p(G/U)]]) \\ &= \dim_{\mathbb{F}_p} H_2(U)\,, \text{ pelo Isomorfismo de Shapiro} \\ &= 1\,, \text{ pois } U \text{ também é um grupo de Dëmushkin}\end{aligned}$$

Além disso, a desigualdade

$$\dim_{\mathbb{F}_p} H_0(G, M) \leq \dim_{\mathbb{F}_p} H_1(G, [[\mathbb{F}_p(G/U)]]) + \dim_{\mathbb{F}_p} H_0(G, [[\mathbb{F}_p(G/H)]])$$

nos mostra que M é um $[[\mathbb{F}_pG]]$-módulo finitamente gerado. A desigualdade sobre $H_1(G, M)$ nos diz que ou M é um $[[\mathbb{F}_pG]]$-módulo livre ou é 1-relacionado. No primeiro caso, temos $\beta_1^G(M) \leq \dim_{\mathbb{F}_p} H_1(G, M) = 0$, e, no segundo, podemos aplicar o Corolário 5.3.5. $\square$

Lema 5.4.3 ([JZS19, Prop. 4.6])**.** *Sejam G um grupo de Dëmushkin infinito e M um $[[\mathbb{F}_pG]]$-módulo finitamente relacionado. Se N é um $[[\mathbb{F}_pG]]$-submódulo de M tal que M/N é finito ou $H_2(G, M/N) = 0$, então $\beta_1^G(N) \leq \beta_1^G(M)$.*

Demonstração. Como G é topologicamente finitamente gerado, este possui um sistema fundamental de vizinhanças da unidade $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ consistindo de uma cadeia de subgrupos abertos (Prop. 2.5.1 de [RZ10]). Pelo Lema 5.2.2, temos que:

$$\beta_1^G(N) = \inf_{n\geq 1} \frac{\dim_{\mathbb{F}_p} H_1(U_n, N)}{[G\colon U_n]} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dim_{\mathbb{F}_p} H_1(U_n, N)}{[G\colon U_n]}\,.$$

A sequência exata curta

$$0 \to N \to M \to M/N \to 0$$

induz a sequência exata longa

$$\cdots \to H_2(U_n, M/N) \to H_1(U_n, N) \to H_1(U_n, M) \to \cdots$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ e, portanto,

$$\beta_1^G(N) = \lim_{n\to\infty} \frac{\dim_{\mathbb{F}_p} H_1(U_n, N)}{[G\colon U_n]} \leq \lim_{n\to\infty} \frac{\dim_{\mathbb{F}_p} H_1(U_n, M)}{[G\colon U_n]} + \lim_{n\to\infty} \frac{\dim_{\mathbb{F}_p} H_2(U_n, M/N)}{[G\colon U_n]}\,.$$

Se M/N é finito, então pela Proposição B.1.7 temos que

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} \frac{\dim_{\mathbb{F}_p} H_2(U_n, M/N)}{[G\colon U_n]} \leq \lim_{n\to\infty} \frac{\dim_{\mathbb{F}_p} M/N}{[G\colon U_n]} = 0\,.$$

Se $H_2(G, M/N) = 0$, então o Lema 5.2.2 também garante que

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} \frac{\dim_{\mathbb{F}_p} H_2(U_n, M/N)}{[G\colon U_n]} \leq \dim_{\mathbb{F}_p} H_2(G, M/N) \leq 0\,.$$

De ambas as formas, temos que $\beta_1^G(N) \leq \beta_1^G(M)$. $\square$

Lema 5.4.4 ([JZS19, Prop. 7.3])**.** *Sejam G um grupo de Dëmushkin infinito e M um $[[\mathbb{F}_pG]]$-módulo finitamente apresentado. Se M_0 é um $[[\mathbb{F}_pG]]$-submódulo aberto de M tal que $\beta_1^G(M_0) = 0$ e U é um subgrupo aberto de G agindo trivialmente sobre M/M_0, então existe um $[[\mathbb{F}_pU]]$-submódulo $M' \leq_o M$ tal que*

$$\dim_{\mathbb{F}_p} M/M' \leq \beta_1^G(M)\,, \quad \beta_1^U(M') = 0\,, \quad M_0 \leq_o M'\,.$$

Demonstração. Prosseguiremos por indução sobre a codimensão de M_0 em M sobre $\mathbb{F}_p$. Para o caso base $M_0 = M$, faça $M' = M_0 = M$. Temos trivialmente que $M_0 \leq_o M'$ e que $0 = \dim_{\mathbb{F}_p} M/M' \leq \beta_1^G(M)$. Pela parte (a) da Proposição 5.2.3, sabemos que M' também satisfaz

$$\beta_1^U(M') = [G\colon U]\beta_1^G(M') = [G\colon U]\beta_1^G(M_0) = 0$$

como desejado.

Assumamos agora que $M_0 \neq M$ e escolhamos um $[[\mathbb{F}_p G]]$-submódulo M_1 de M de codimensão 1 sobre $\mathbb{F}_p$ contendo M_0. Pela Proposição B.1.3, temos que M_1 também é um $[[\mathbb{F}_p G]]$-módulo finitamente apresentado. Pela hipótese de indução, existe um $[[\mathbb{F}_p U]]$-submódulo M_1' de M_1 contendo M_0 tal que $\beta_1^U(M_1') = 0$ e $\dim_{\mathbb{F}_p} M_1/M_1' \leq \beta_1^G(M_1)$.

Pelo Lema 5.4.3, sabemos que $\beta_1^G(M_1) \leq \beta_1^G(M)$, então suponhamos primeiramente que a desigualdade é estrita. Como os gradientes são inteiros, temos que $\beta_1^G(M_1) \leq \beta_1^G(M) - 1$. Fazendo então $M' = M_1'$, temos que

$$\dim_{\mathbb{F}_p} M/M' = 1 + \dim_{\mathbb{F}_p} M_1/M' \leq 1 + \beta_1^G(M_1) \leq \beta_1^G(M)\,,$$

como procurávamos.

Suponhamos agora que $\beta_1^G(M_1) = \beta_1^G(M)$. Como U age trivialmente sobre M/M_0, temos que U também age trivialmente sobre M/M_1'. Escolha $a \in M - M_1$ e faça M' ser o $[[\mathbb{F}_p U]]$-submódulo de M gerado por M_1' e a. É evidente que $M_0 \leq_o M'$. Temos que $M' \cap M_1 = M_1'$ e, como M_1 possui codimensão 1 em M, também vale que $M' + M_1 = M$. Assim, a sequência exata curta de $[[\mathbb{F}_p U]]$-módulos finitamente apresentados

$$0 \to M' \cap M_1 \to M' \oplus M_1 \to M' + M_1 \to 0$$

nos fornece a sequência exata curta

$$0 \to M_1' \to M' \oplus M_1 \to M \to 0\,.$$

Pela parte (a) da Proposição 5.2.3, sabemos que

$$\beta_1^U(M_1) = [G\colon U]\beta_1^G(M_1) = [G\colon U]\beta_1^G(M) = \beta_1^U(M)$$

e, portanto, a desigualdade anterior se torna

$$\beta_1^U(M') + \beta_1^U(M) \leq \beta_1^U(M)\,.$$

Logo:

$$\begin{aligned}
\beta_1^U(M') &= \beta_1^U(M' \oplus M_1) - \beta_1^U(M_1)\,, \text{ pela parte (d) da Proposição 5.2.3}\\
&\leq \beta_1^U(M_1') + \beta_1^U(M) - \beta_1^U(M_1)\,, \text{ pela parte (c) da Proposição 5.2.3}\\
&= \beta_1^U(M) - \beta_1^U(M_1)\,, \text{ pois } \beta_1^U(M_1') = 0\\
&= 0\,, \text{ pois } \beta_1^U(M) = \beta_1^U(M_1)\,.
\end{aligned}$$

Por fim, temos:

$$\dim_{\mathbb{F}_p} M/M' = \dim_{\mathbb{F}_p}(M' + M_1)/M' = \dim_{\mathbb{F}_p} M_1/(M' \cap M_1) = \dim_{\mathbb{F}_p} M_1/M_1' \leq \beta_1^G(M_1) = \beta_1^G(M)\,. \square$$

Corolário 5.4.5 ([JZS19, Cor. 7.4])**.** *Sejam G um grupo de Dëmushkin infinito e H um subgrupo fechado topologicamente finitamente gerado de G. Então, existem um subgrupo aberto $U \leq_o G$ e um $[[\mathbb{F}_pU]]$-submódulo N de $[[\mathbb{F}_p(G/H)]]$ tal que*

$$\dim_{\mathbb{F}_p}[[\mathbb{F}_p(G/H)]]/N \leq \beta_1^G([[\mathbb{F}_p(G/U)]])\,, \quad \beta_1^U(N) = 0\,.$$

Demonstração. Pelo Lema 5.4.2, existe um $[[\mathbb{F}_pG]]$-submódulo aberto M_0 de $[[\mathbb{F}_p(G/H)]]$ tal que $\beta_1^G(M_0) = 0$. Definamos U como o núcleo da ação de G sobre o $[[\mathbb{F}_pG]]$-módulo finito $[[\mathbb{F}_p(G/H)]]/M_0$. Assim, U age trivialmente sobre $[[\mathbb{F}_p(G/H)]]/M_0$ e, desta forma, o Lema 5.4.4 nos fornece o submódulo desejado. $\square$

Podemos agora, por fim, provar o principal teorema deste capítulo:

Teorema 5.4.6 ([JZS19, Sec. 8])**.** *Sejam G um grupo de Dëmushkin com $d(G) > 2$ e H e K dois subgrupos fechados topologicamente finitamente gerados de G com índice infinito. Então, o gradiente de relação satisfaz:*

$$\beta_1^G([[\mathbb{F}_p(H\backslash G)]] \,\widehat{\otimes}_{\mathbb{F}_p}\, [[\mathbb{F}_p(G/K)]]) \leq \beta_1^G([[\mathbb{F}_p(H\backslash G)]])\beta_1^G([[\mathbb{F}_p(G/K)]])\,.$$

Demonstração. O Corolário 5.4.5 nos fornece um subgrupo aberto $U \leq_o G$ e um $[[\mathbb{F}_pU]]$-submódulo N de $[[\mathbb{F}_p(H\backslash G)]]$ tais que $\beta_1^U(N) = 0$ e

$$\dim_{\mathbb{F}_p}[[\mathbb{F}_p(H\backslash G)]]/N \leq \beta_1^G([[\mathbb{F}_p(H\backslash G)]])\,.$$

Pela parte (a) da Proposição 5.2.3, multiplicando ambos os lados da desigualdade do teorema por $[G\colon U]$, obtemos:

$$\beta_1^U([[\mathbb{F}_p(H\backslash G)]] \,\widehat{\otimes}_{\mathbb{F}_p}\, [[\mathbb{F}_p(G/K)]]) \leq \beta_1^G([[\mathbb{F}_p(H\backslash G)]])\beta_1^U([[\mathbb{F}_p(G/K)]]\,.$$

A sequência exata curta

$$0 \to N \to [[\mathbb{F}_p(H\backslash G)]] \to [[\mathbb{F}_p(H\backslash G)]]/N \to 0$$

tensorada com $[[\mathbb{F}_p(G/K)]]$ sobre $\mathbb{F}_p$ nos fornece, por meio da parte (c) da Proposição 5.2.3, a desigualdade:

$$\beta_1^U([[\mathbb{F}_p(H\backslash G)]]\,\widehat{\otimes}_{\mathbb{F}_p}\,[[\mathbb{F}_p(G/K)]]) \leq \beta_1^U(N\,\widehat{\otimes}_{\mathbb{F}_p}\,[[\mathbb{F}_p(G/K)]]) \\ + \beta_1^U(([[\mathbb{F}_p(H\backslash G)]]/N)\,\widehat{\otimes}_{\mathbb{F}_p}\,[[\mathbb{F}_p(G/K)]])$$

Como $[[\mathbb{F}_p(H\backslash G)]]/N$ admite uma filtração por $[[\mathbb{F}_pU]]$-submódulos com quocientes sucessivos isomorfos a $\mathbb{F}_p$ de comprimento menor do que ou igual a $\beta_1^G([[\mathbb{F}_p(H\backslash G)]])$ pela construção de N, o $[[\mathbb{F}_pU]]$-módulo $([[\mathbb{F}_p(H\backslash G)]]/N)\,\widehat{\otimes}_{\mathbb{F}_p}\,[[\mathbb{F}_p(G/K)]]$ admite uma tal filtração de mesmo tamanho com quocientes sucessivos isomorfos a $[[\mathbb{F}_p(G/K)]]$. Assim, após $\beta_1^G([[\mathbb{F}_p(H\backslash G)]])$ aplicações da subaditividade do gradiente de relação com respeito a sequências exatas curtas, obtemos a desigualdade:

$$\beta_1^U(([[\mathbb{F}_p(H\backslash G)]]/N)\,\widehat{\otimes}_{\mathbb{F}_p}\,[[\mathbb{F}_p(G/K)]]) \leq \beta_1^G([[\mathbb{F}_p(H\backslash G)]])\beta_1^U([[\mathbb{F}_p(G/K)]])\,.$$

Portanto, é suficiente mostrarmos que

$$\beta_1^U(N\,\widehat{\otimes}_{\mathbb{F}_p}\,[[\mathbb{F}_p(G/K)]]) = 0\,.$$

Pelo Corolário 5.1.6, sabemos que o $[[\mathbb{F}_pH]]$-módulo $[[\mathbb{F}_p(G/K)]]$ é finitamente relacionado. Pelo Lema 5.4.1, existe um $[[\mathbb{F}_pG]]$-submódulo M de $[[\mathbb{F}_p(G/K)]]$ tal que $\beta_1^H(M) = 0$. Pela subaditividade do gradiente de relação, novamente, podemos concluir que

$$\beta_1^U(N\,\widehat{\otimes}_{\mathbb{F}_p}\,[[\mathbb{F}_p(G/K)]]) \leq \beta_1^U(N\,\widehat{\otimes}_{\mathbb{F}_p}\,M) + \beta_1^U(N\,\widehat{\otimes}_{\mathbb{F}_p}\,([[\mathbb{F}_p(G/K)]]/M))\,.$$

Repetindo o argumento da filtração para $N\,\widehat{\otimes}_{\mathbb{F}_p}\,([[\mathbb{F}_p(G/K)]]/M)$, temos que

$$\beta_1^U(N\,\widehat{\otimes}_{\mathbb{F}_p}\,([[\mathbb{F}_p(G/K)]]/M)) \leq \left(\dim_{\mathbb{F}_p}[[\mathbb{F}_p(G/K)]]/M\right)\cdot\beta_1^U(N) = 0\,.$$

Assim, novamente é suficiente mostrarmos que

$$\beta_1^U(N\,\widehat{\otimes}_{\mathbb{F}_p}\,M) = 0\,.$$

Pela Proposição B.1.7, sabemos que

$$\dim_{\mathbb{F}_p} H_2(U, M) \leq \dim_{\mathbb{F}_p} H_2(U, [[\mathbb{F}_p(G/K)]])\,.$$

Aplicando a Proposição B.1.6, como K é pro-p livre, sabemos que $H_2(U, [[\mathbb{F}_p(G/K)]]) = 0$. Assim, aplicando o argumento de filtração com quocientes sucessivos isomorfos a M ao

$[[\mathbb{F}_p U]]$-módulo $([[\mathbb{F}_p(H\backslash G)]]/N) \mathbin{\widehat{\otimes}}_{\mathbb{F}_p} M$, obtemos

$$H_2(U, ([[\mathbb{F}_p(H\backslash G)]]/N) \mathbin{\widehat{\otimes}}_{\mathbb{F}_p} M) = 0\,.$$

Desta forma, podemos aplicar o Lema 5.4.3 ao submódulo $N \mathbin{\widehat{\otimes}}_{\mathbb{F}_p} M$ de $[[\mathbb{F}_p(H\backslash G)]] \mathbin{\widehat{\otimes}}_{\mathbb{F}_p} M$ para concluirmos que:

$$\begin{aligned}
\beta_1^U(N \mathbin{\widehat{\otimes}}_{\mathbb{F}_p} M) &\leq \beta_1^U([[\mathbb{F}_p(H\backslash G)]] \mathbin{\widehat{\otimes}}_{\mathbb{F}_p} M) \\
&= [G\colon U]\beta_1^G([[\mathbb{F}_p(H\backslash G)]] \mathbin{\widehat{\otimes}}_{\mathbb{F}_p} M) \\
&= [G\colon U]\beta_1^G(\mathrm{Ind}_H^G M) \\
&= [G\colon U]\beta_1^H(M) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Assim, obtemos a desigualdade desejada. □

Corolário 5.4.7. *Seja G um grupo de Dëmushkin com $d(G) > 2$. Então, G satisfaz a desigualdade de Hanna Neumann, isto é, dados dois subgrupos fechados H e K de G topologicamente finitamente gerados, o conjunto*

$$S = S(G, H, K) = \{x \in H\backslash G/K \mid H \cap xKx^{-1} \neq \{1\}\}$$

é finito e temos

$$\sum_{x\in S} \big(d(H \cap xKx^{-1}) - 1\big) \leq (d(H) - 1)\,(d(K) - 1)\ .$$

Demonstração. O caso em que H ou K possuem índice finito em G é tratado pela Proposição 5.1.3. O caso em que ambos possuem índice infinito é consequência do Corolário 5.1.6, da Proposição 5.2.4 e do Teorema 5.4.6. □

5.5 L^2-independência e L^2-Hall

As propriedades do gradiente de relação $\beta_1^G(M)$ demonstradas em [JZS19] podem ser utilizadas para demonstrar a inércia de retrações de G (no sentido de Dicks-Ventura, [DV96]). Este resultado foi demonstrado para grupos de superfície por Y. Antolín e A. Jaikin-Zapirain em [AJZ20] utilizando propriedades dos L^2-invariantes destas superfícies, e o gradiente de relação $\beta_1^G(M)$ pode ser considerado o análogo pro-p dos L^2-invariantes que fazem esta demonstração funcionar no caso abstrato.

A ideia central da prova a seguir é uma adaptação do argumento em [AJZ20] onde o papel da L^2-independência abstrata é desempenhada pelo anulamento de um certo gradiente de relação. Cabe observar que no caso abstrato finitamente gerado, L^2-independência também pode ser caracterizada pelo anulamento de um gradiente homológico ([AJZ20]).

Definição 5.5.1. Sejam G um grupo pro-p finitamente gerado, H um subgrupo fechado finitamente gerado e M o núcleo da sequência exata curta:

$$0 \to M \to [[\mathbb{F}_p(G/H)]] \to \mathbb{F}_p \to 0\,.$$

Dizemos que um subgrupo fechado finitamente gerado $H \leq_c G$ de um grupo pro-p finitamente gerado G é L^2*-independente* em G se

$$\beta_1^G(M) = 0\,.$$

Dizemos que H é *inerte* em G se para todo subgrupo fechado finitamente gerado $K \leq_c G$ vale que $d(H \cap K) \leq d(K)$.

Notemos que, se K não for finitamente gerado, então a desigualdade $d(H \cap K) \leq d(K)$ vale para qualquer subgrupo fechado $H \leq_c G$, uma vez que $d(K)$ será igual ao peso local de K e, portanto, $d(K') \leq d(K)$ para todo subgrupo fechado $K' \leq_c K$ [RZ10, Cor. 2.6.5]. Assim, a condição de inércia da Definição 5.5.1 não perde generalidade ao ser verificada apenas para subgrupos K finitamente gerados.

Lema 5.5.2. *Se H é um subgrupo fechado não-trivial finitamente gerado de um grupo de Dëmushkin infinito G, então temos:*

$$\beta_1^G([[\mathbb{F}_p(G/H)]]) = \begin{cases} d(H) - 2, \text{ se } [G\colon H] < \infty \\ d(H) - 1, \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

Em particular, $\beta_1^G(\mathbb{F}_p) = d(G) - 2$.

Demonstração. Temos

$$\beta_1^G([[\mathbb{F}_p(G/H)]]) = \beta_1^G(\mathrm{Ind}_H^G \mathbb{F}_p) = \beta_1^H(\mathbb{F}_p)\,.$$

Se H for aberto em G, então H é um grupo de Dëmushkin e

$$\begin{aligned}\beta_1^H(\mathbb{F}_p) &= \inf_{U \leq_o H} \frac{\dim_{\mathbb{F}_p} H_1(U)}{[H\colon U]} = \inf_{U \leq_o H} \frac{[H\colon U](d(H)-2)+2}{[H\colon U]} \\ &= d(H) - 2 + \inf_{U \leq_o H} \frac{2}{[H\colon U]} = d(H) - 2\,.\end{aligned}$$

Se $[G\colon H] = \infty$, então H é pro-p livre. Logo:

$$\begin{aligned}\beta_1^H(\mathbb{F}_p) &= \inf_{U \leq_o H} \frac{\dim_{\mathbb{F}_p} H_1(U)}{[H\colon U]} = \inf_{U \leq_o H} \frac{[H\colon U](d(H)-1)+1}{[H\colon U]} \\ &= d(H) - 1 + \inf_{U \leq_o H} \frac{1}{[H\colon U]} = d(H) - 1\,.\end{aligned}$$ □

Lema 5.5.3. *Se H é um subgrupo L^2-independente em um grupo de Dëmushkin G, então $d(H) \leq d(G)$. Se, além disso, H for um subgrupo próprio e G não for solúvel, temos que $[G\colon H] = \infty$.*

Demonstração. Da sequência exata curta

$$0 \to M \to [[\mathbb{F}_p(G/H)]] \to \mathbb{F}_p \to 0\,,$$

inferimos:

$$\begin{aligned} d(H) - 2 &\leq \beta_1([[\mathbb{F}_p(G/H)]])\,, \text{ pelo Lema 5.5.2} \\ &\leq \beta_1(M) + \beta_1(\mathbb{F}_p)\,, \text{ pelo item (c) da Proposição 5.2.3} \\ &= d(G) - 2\,, \text{ pelo Lema 5.5.2}\end{aligned}$$

Suponhamos agora que G não seja solúvel e que H seja aberto. Pela aditividade do gradiente de relação sob somas diretas, temos:

$$\beta_1^G(M) = ([G\colon H] - 1)\,\beta_1^G(\mathbb{F}_p) = ([G\colon H] - 1)\,(d(G) - 2)\,.$$

Assim, se H for um subgrupo L^2-independente, devemos ter $[G\colon H] = 1$, isto é, $G = H$. □

Teorema 5.5.4. *Sejam G um grupo de Dëmushkin não solúvel e H um subgrupo L^2-independente de G. Então, para todo subgrupo fechado finitamente gerado K de G, temos que $H \cap K$ é um subgrupo L^2-independente de K.*

Demonstração. Seja M o $[[\mathbb{F}_p K]]$-módulo definido pela sequência exata curta

$$0 \to M \to [[\mathbb{F}_p(K/H \cap K)]] \to \mathbb{F}_p \to 0\,.$$

Note que M é um $[[\mathbb{F}_p K]]$-módulo finitamente apresentado por ser um submódulo aberto de $[[\mathbb{F}_p(K/H \cap K)]]$. Precisamos provar que $\beta_1^K(M) = 0$, e, como é suficiente considerarmos o caso $H \neq G$, pelo Lema 5.5.3 sabemos que H é pro-p livre. Temos o seguinte diagrama comutativo com linhas e colunas exatas:

$$\begin{tikzcd}
 & & P \arrow[ddll] \arrow[dd, hook] & O \arrow[d, hook] & \\
 & & & {[[\mathbb{F}_pG]]} \arrow[dr, two heads] \arrow[dd] & \\
N \arrow[rr, hook] \arrow[dd] & & {[[\mathbb{F}_pK]]} \arrow[ur, hook] \arrow[rr, two heads] \arrow[dd] & & \mathbb{F}_p \arrow[dd, leftrightarrow] \\
 & \mathrm{Ker}(\psi) \arrow[rr, hook] & & {[[\mathbb{F}_p(G/H)]]} \arrow[dr, two heads, "\psi"] & \\
M \arrow[rr, hook] & & {[[\mathbb{F}_p(K/H\cap K)]]} \arrow[ur, hook] \arrow[rr, two heads] & & \mathbb{F}_p
\end{tikzcd}$$

Deste diagrama, verificamos que $M \simeq N/P$. Além disso, o diagrama também fornece a igualdade $P = N \cap O$ e portanto $M \simeq N/N \cap O$. Denotando por Q o núcleo do mapa $[[\mathbb{F}_pG]] \to \mathbb{F}_p$, podemos concluir que M é um $[[\mathbb{F}_pK]]$-submódulo de $Q/O = \mathrm{Ker}(\psi)$, pois P, N e O são $[[\mathbb{F}_pK]]$-submódulos de Q. Escolhendo um conjunto completo de representantes X das classes laterais duplas $H\backslash G/K$ em G com $1 \in X$, temos a seguinte sequência de $[[\mathbb{F}_pK]]$-isomorfismos para o módulo quociente:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ker}(\psi)/M &\simeq [[\mathbb{F}_p(G/H)]]/[[\mathbb{F}_p(K/H\cap K)]] \\
&\simeq \left(\bigsqcup_{x\in X}[[\mathbb{F}_p(K/xHx^{-1}\cap K]]\right)/[[\mathbb{F}_p(K/H\cap K)]] \\
&\simeq \bigsqcup_{x\in X-\{1\}}[[\mathbb{F}_p(K/xHx^{-1}\cap K)]]
\end{aligned}$$

Sabemos que $\beta_1^G(\mathrm{Ker}(\psi)) = 0$, uma vez que H é um subgrupo L^2-independente de G. Separaremos agora a demonstração em dois casos, o caso (I) K é aberto em G e o caso (II) K não é aberto em G:

(Caso I: K é aberto). Temos $\beta_1^K(\mathrm{Ker}(\psi)) = [G\colon K]\beta_1^G(\mathrm{Ker}(\psi)) = 0$. Assim, tendo em vista o Lema 5.4.3, é suficiente mostrarmos que $H_2(K, \mathrm{Ker}(\psi)/M) = 0$. Pela expressão anterior, é suficiente vermos que

$$H_2(K, [[\mathbb{F}_p(K/xHx^{-1}\cap K)]]) = 0\,, \quad \forall x \in G\,.$$

Como G não é solúvel, pelo Lema 5.5.3 sabemos que $xHx^{-1} \cap K \leq_c xHx^{-1}$ é pro-p livre. Logo, obtemos para a homologia:

$$H_2(K, [[\mathbb{F}_p(K/xHx^{-1} \cap K)]]) = H_2(K, \operatorname{Ind}_{xHx^{-1}\cap K}^{K} \mathbb{F}_p) = H_2(xHx^{-1} \cap K) = 0\,.$$

Disto, podemos concluir que $\beta_1^K(M) \leq \beta_1^K(\operatorname{Ker}(\psi)) = 0$ pelo Lema 5.4.3, e, portanto, $H \cap K$ é L^2-independente em K.

(Caso II: K não é aberto mas é finitamente gerado). Vamos novamente mostrar que $\beta_1^K(\operatorname{Ker}(\psi)) = 0$. Temos:

$$\beta_1^K(\operatorname{Ker}(\psi)) = \beta_1^G(\operatorname{Ind}_K^G \operatorname{Ker}(\psi)) = \beta_1^G([[\mathbb{F}_p(K\backslash G)]] \mathbin{\widehat{\otimes}}_{\mathbb{F}_p} \operatorname{Ker}(\psi))\,.$$

Se conseguirmos mostrar a submultiplicatividade também para o módulo $[[\mathbb{F}_p(K\backslash G)]] \mathbin{\widehat{\otimes}}_{\mathbb{F}_p} \operatorname{Ker}(\psi)$, obteremos o resultado desejado uma vez que $\beta_1^G(\operatorname{Ker}(\psi)) = 0$. Procederemos como no Teorema 5.4.6.

Pelo Corolário 5.4.5, existe um subgrupo aberto $U \leq_o G$ e um $[[\mathbb{F}_pU]]$-submódulo A de $[[\mathbb{F}_p(K\backslash G)]]$ tal que $\beta_1^U(A) = 0$ e

$$\dim_{\mathbb{F}_p}[[\mathbb{F}_p(K\backslash G)]]/A \leq \beta_1^G([[\mathbb{F}_p(K\backslash G)]])\,.$$

Aplicando a subaditividade de β_1^U, obtemos:

$$\beta_1^U([[\mathbb{F}_p(K\backslash G)]] \mathbin{\widehat{\otimes}}_{\mathbb{F}_p} \operatorname{Ker}(\psi)) \leq \beta_1^U(A \mathbin{\widehat{\otimes}}_{\mathbb{F}_p} \operatorname{Ker}(\psi)) + \beta_1^U(([[\mathbb{F}_p(K\backslash G)]]/A) \mathbin{\widehat{\otimes}}_{\mathbb{F}_p} \operatorname{Ker}(\psi))$$

Como $[[\mathbb{F}_p(K\backslash G)]]/A$ é finito e $\beta_1^U(\operatorname{Ker}(\psi)) = [G\colon U]\beta_1^G(\operatorname{Ker}(\psi)) = 0$, o argumento de filtração nos fornece:

$$\beta_1^U(([[\mathbb{F}_p(K\backslash G)]]/A) \mathbin{\widehat{\otimes}}_{\mathbb{F}_p} \operatorname{Ker}(\psi)) = 0\,.$$

Como K é finitamente gerado, sabemos que $\operatorname{Ker}(\psi)$ é um $[[\mathbb{F}_pK]]$-módulo finitamente relacionado, pois:

$$H_1(K, \operatorname{Ker}(\psi)) \leq_c H_1(K, [[\mathbb{F}_p(G/H)]]) \simeq \coprod_{x\in X} H_1(xHx^{-1} \cap K)$$

e este último é finito pelo Corolário 5.1.6. Assim, existe um $[[\mathbb{F}_pG]]$-submódulo aberto B de $\operatorname{Ker}(\psi)$ tal que $\beta_1^K(B) = 0$. Novamente, temos:

$$\beta_1^U(A \mathbin{\widehat{\otimes}}_{\mathbb{F}_p} \operatorname{Ker}(\psi)) \leq \beta_1^U(A \mathbin{\widehat{\otimes}}_{\mathbb{F}_p} B) + \beta_1^U(A \mathbin{\widehat{\otimes}}_{\mathbb{F}_p} (\operatorname{Ker}(\psi)/B))\,.$$

O argumento de filtração e o anulamento de $\beta_1^U(A)$ garantem que

$$\beta_1^U(A \mathbin{\widehat{\otimes}}_{\mathbb{F}_p} (\mathrm{Ker}(\psi)/B)) = 0\,.$$

Tendo em mente a sequência exata curta de $[[\mathbb{F}_p U]]$-módulos

$$0 \to A \mathbin{\widehat{\otimes}}_{\mathbb{F}_p} B \to [[\mathbb{F}_p(K\backslash G)]] \mathbin{\widehat{\otimes}}_{\mathbb{F}_p} B \to ([[\mathbb{F}_p(K\backslash G)]]/A) \mathbin{\widehat{\otimes}}_{\mathbb{F}_p} B \to 0\,,$$

uma vez que a Proposição B.1.7 nos dá

$$\begin{aligned} \dim_{\mathbb{F}_p} H_2(U, B) &\leq \dim_{\mathbb{F}_p} H_2(U, \mathrm{Ker}(\psi)) \\ &\leq \dim_{\mathbb{F}_p} H_2(U, [[\mathbb{F}_p(G/H)]]) \\ &= \dim_{\mathbb{F}_p} H_2(H, [[\mathbb{F}_p(G/U)]]) = 0\,, \end{aligned}$$

mais um argumento de filtração nos fornece

$$H_2(U, ([[\mathbb{F}_p(K\backslash G)]]/A) \mathbin{\widehat{\otimes}}_{\mathbb{F}_p} B) = 0\,.$$

Uma última aplicação do Lema 5.4.3 finaliza o argumento:

$$\begin{aligned} \beta_1^U(A \mathbin{\widehat{\otimes}}_{\mathbb{F}_p} B) &\leq \beta_1^U([[\mathbb{F}_p(K\backslash G)]] \mathbin{\widehat{\otimes}}_{\mathbb{F}_p} B) \\ &= [G\colon U]\beta_1^G(\mathrm{Ind}_K^G B) \\ &= [G\colon U]\beta_1^K(B) = 0\,. \end{aligned}$$

Seja, agora, $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ um sistema fundamental de vizinhanças da unidade em K consistindo em uma cadeia de subgrupos abertos. Como $\mathrm{cd}(K) \leq 1$, temos que $H_1(U_n, -)$ é um funtor exato à esquerda, e de onde segue que:

$$\begin{aligned} \beta_1^K(M) &= \lim_{n\to\infty} \frac{\dim_{\mathbb{F}_p} H_1(U_n, M)}{[K\colon U_n]} \\ &\leq \lim_{n\to\infty} \frac{\dim_{\mathbb{F}_p} H_1(U_n, \mathrm{Ker}(\psi))}{[K\colon U_n]} \\ &= \beta_1^K(\mathrm{Ker}(\psi)) = 0\,. \end{aligned}$$

Isto conclui a prova de que $H \cap K$ é L^2-independente em K para todo subgrupo fechado $K \leq_c G$ finitamente gerado. $\square$

Corolário 5.5.5. *Seja H um subgrupo fechado próprio de um grupo de Dëmushkin infinito G. Se G retrai sobre H, então H é pro-p livre, finitamente gerado e L^2-independente em G.*

Em particular, se G não for solúvel, H é inerte em G para subgrupos fechados finitamente gerados.

Demonstração. Pela sobrejetividade da retração, H pode ser gerado por $d(G)$ elementos. Além disso, se $\rho\colon G \to H$ é uma retração, temos:

$$[G\colon H] = |\mathrm{Ker}(\rho)|$$

e, portanto, H possui índice infinito uma vez que G é livre-de-torção. Uma retração $\rho\colon G \to H$ induz uma seção do homomorfismo canônico $H/\Phi(H) \to G/\Phi(G)$, que logo deve ser injetivo. A afirmação sobre ser L^2-independente segue então de [AJZ20, Prop. 4.4]. A parte final é consequência do Teorema 5.5.4. □

Lema 5.5.6. *Todo subgrupo fechado H de um grupo de Dëmushkin solúvel infinito G é L^2-independente em G.*

Demonstração. Da sequência exata

$$0 \to M \to [[\mathbb{F}_p(G/H)]] \to \mathbb{F}_p \to 0$$

inferimos pelo Lema 5.4.3 que:

$$\begin{aligned} \beta_1^G(M) &\leq \beta_1^G([[\mathbb{F}_p(G/H)]]) \\ &= 0\,, \text{ pelo Lema 5.5.2,} \end{aligned}$$

uma vez que $d(H) = 2$ se H for aberto em G e que $d(H) = 1$ se H for fechado em G. □

Para grupos de Dëmushkin solúveis G, notemos que todo subgrupo fechado é inerte devido a G possuir posto-de-subgrupos igual a 2. De fato, dados H e K subgrupos fechados não triviais de G, ou $d(K) = 2$ e assim $d(H \cap K) \leq 2$ pela definição do posto-de-subgrupos, ou $d(K) = 1$ e, portanto, $H \cap K$ é trivial ou procíclico.

Definição 5.5.7. Dizemos que um grupo pro-p finitamente gerado G é L^2-*Hall* se todo subgrupo fechado topologicamente finitamente gerado $H \leq_c G$ é virtualmente L^2-independente, isto é, se existe um subgrupo aberto U de G contendo H tal que H seja L^2-independente em U.

Corolário 5.5.8. *Todo grupo de Dëmushkin é L^2-Hall.*

Demonstração. Seja H um subgrupo fechado finitamente gerado de um grupo de Dëmushkin G. Se G for solúvel, então H é L^2-independente em G pelo Lema 5.5.6. Se G não for solúvel, então H é uma retração de algum subgrupo aberto $U \leq_o G$ pelo Teorema 4.1.4. Assim, H é L^2-independente em U pelo Teorema 5.5.4. □

Capítulo 6

Considerações finais

Cabem alguns comentários ao final da nossa apresentação a respeito dos resultados demonstrados. Além disso, convém expormos algumas considerações sobre os resultados que gostaríamos de ter abordado, tal como as comparações entre os objetos pro-p estudados e seus análogos abstratos. Visando motivar as futuras investigações acerca dos grupos de Dëmushkin, finalizaremos esta dissertação com algumas questões em aberto.

Em [Lab66], J. Labute definiu um grupo de Dëmushkin de posto enumerável $\aleph_0$ como um grupo pro-p G tal que:

D1' $\dim_{\mathbb{F}_p} H^1(G) = \aleph_0$;

D2' $\dim_{\mathbb{F}_p} H^2(G) = 1$;

D3' O produto cup

$$\cup\colon H^1(G) \times H^1(G) \to H^2(G)$$

é uma forma bilinear não degenerada, isto é, se $a \cup b = 0$ para todo $b \in H^1(G)$, então $a = 0$.

Neste mesmo artigo, Labute obteve uma classificação destes grupos análoga à classificação do Teorema 2.3.9 e os exibiu como subgrupos p-Sylow do grupo de Galois de alguns corpos locais.

As versões pro-p dos teoremas de Greenberg para um grupo de Dëmushkin G da Proposição 4.1.5 e seus corolários foram demonstrados pela primeira vez em [KZ10, Prop. 7.1 e Lem. 7.2] nos casos em que G é isomorfo ao completamento pro-p de um grupo de superfície orientável de gênero par ou ao completamento pro-2 de um grupo de superfície não orientável. Como corolário da Proposição 4.1.5, obtemos a caracterização do centro dos grupos de Dëmushkin pro-p G com $d(G) > 2$ ou $p \neq 2$.

Embora o caso pro-2 não tenha feito parte dessa dissertação, o enunciado da classificação completa dos centros de um grupo de Dëmushkin é dado pela proposição a seguir, demonstrada pela primeira vez em [Yam93].

Proposição 6.0.1 ([Yam93, Teo. 3.1])**.** *Um grupo de Dëmushkin G (possivelmente de posto enumerável) possui centro não trivial se, e somente se, G é isomorfo a um dos grupos:*

(i) $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$*;*

(ii) $\mathbb{Z}_p^2$*;*

(iii) O completamento pro-2 *do grupo fundamental da garrafa de Klein*

$$\mathfrak{K}_{\hat{2}} \simeq \langle x, y \mid xyx^{-1} = y^{-1} \rangle \,.$$

Além disso, o centro de $\mathfrak{K}_{\hat{2}}$ é o subgrupo procíclico topologicamente gerado por x^2.

Um grupo abstrato Γ é dito um grupo de dualidade de Poincaré em dimensão n se o $[\mathbb{Z}\Gamma]$-módulo $\mathbb{Z}$ com a ação trivial de Γ possui uma resolução projetiva

$$0 \to P_n \to P_{n-1} \to \cdots \to P_0 \to \mathbb{Z} \to 0$$

onde cada P_i é finitamente gerado e se

$$H^i(\Gamma, [\mathbb{Z}\Gamma]) \simeq \begin{cases} 0\,, & \text{se } i \neq n\,, \\ \mathbb{Z}\,, & \text{se } i = n\,, \end{cases}$$

de acordo com a definição em [Bro82, Sec. VIII.10] (*cf.* [Dav14, Def. 3.2]). Algumas consequências desta definição são que os grupos $H^i(\Gamma, \mathbb{Z})$ são finitamente gerados para todo índice i, que há um isomorfismo $H^n(\Gamma, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$ e que o produto cup $\cup \colon H^i(\Gamma, \mathbb{Z}) \times H^{n-i}(\Gamma, \mathbb{Z}) \to H^n(\Gamma, \mathbb{Z})$ induz isomorfismos

$$H^i(\Gamma, \mathbb{Z}) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(H^{n-i}(\Gamma, \mathbb{Z}), \mathbb{Z})$$

em todas as dimensões i. Assim, as condições **D1-D3** da Definição 2.1.1 foram motivadas pelas propriedades esperadas de um análogo pro-p à dualidade de Poincaré abstrata.

O único grupo abstrato de dualidade de Poincaré em dimensão 1 é $\mathbb{Z}$ a menos de isomorfismo, e, em [Eck87], 20 anos após a conclusão da classificação dos grupos de Dëmushkin, foi demonstrado que Γ é um grupo abstrato de dualidade de Poincaré em dimensão 2 se, e somente se, Γ é isomorfo ao grupo fundamental de uma superfície compacta, fechada e conexa, obtendo assim a classificação abstrata em dimensão 2 (ver [Dav14, Sec. 5]). Em dimensão 1, temos que o único grupo pro-p de dualidade de Poincaré é $\mathbb{Z}_p$, coincidentemente também o completamento pro-p de $\mathbb{Z}$. Entretanto, existem grupos de Dëmushkin que não são isomorfos ao completamento pro-p de um grupo abstrato de superfície (estudados no Exemplo 2.1.12), como por exemplo os grupos do Exemplo 2.1.8 com invariante q maior que p.

Contudo, grupos de Dëmushkin possuem diversas propriedades análogas às propriedades dos grupos fundamentais de superfícies (devidamente interpretadas nos contextos pro-p e abstratos): são grupos finitamente gerados e 1-relacionados, livres-de-torção, com dimensão cohomológica 2 ([Bro82, Cap. V e VIII]), com as propriedades de Howson ([Gre60]) e de retrações virtuais ([Sco78]), satisfazendo a dicotomia estrutural em termos da finitude do índice para seus subgrupos ([Bro82, Sec. VIII.10]) e a fórmula do posto estilo "Schreier"/"Hurewicz" ([Hat01, Exer. 2.2.23]), e, caso sejam grupos não solúveis, satisfazendo o enunciado dos teoremas de Greenberg ([Gre60]) e a Desigualdade de Hanna Neumann ([AJZ20]).

Enunciamos, por fim, alguns problemas em aberto relacionados aos grupos de Dëmushkin. Começamos relembrando a definição de um grupo pro-p limite: definimos como $\mathcal{G}_0$ a classe de todos os grupos pro-p livres topologicamente finitamente gerados, $\mathcal{G}_n$ como a classe de todos os grupos G_n tais que $G_n \simeq G_{n-1} \coprod_C A_{n-1}$, onde $G_{n-1} \in \mathcal{G}_{n-1}$, $A_{n-1} \simeq \mathbb{Z}_p^k$ para algum $k \in \mathbb{N}$ e C é um subgrupo procíclico de ambos A_{n-1} e G_{n-1} sendo um fator direto do primeiro e cujo normalizador de todo subgrupo procíclico seu em G_{n-1} coincide com C ([ZZ20, Def. 3.1]). Um grupo G é dito um grupo pro-p limite se $G \in \mathcal{G}_n$ para algum n.

Os grupos pro-p livres topologicamente finitamente gerados e os grupos pro-p abelianos livres de posto finito são exemplos de grupos pro-p limite. Em [KZ11, Sec. 3], foi demonstrado que todo grupo de Dëmushkin com $q = 0$ e invariante d divísivel por 4 também é um grupo pro-p limite. Além disto, nenhum grupo de Dëmushkin solúvel não comutativo é um grupo pro-p limite por possuírem um subgrupo normal procíclico [KZ11, Teo. 6.5]. Assim, perguntamos:

(**Pr1**) Todo grupo de Dëmushkin não solúvel é um grupo pro-p limite?

Em [KZ11, Sec. 9], foi sugerida uma lista de possíveis propriedades dos grupos pro-p limites, incluindo a propriedade de Howson e a propriedade de retrações virtuais. Em virtude da validade destas para os grupos de Dëmushkin não solúveis, recordamos tais propriedades como evidência positiva para **Pr1**.

No Exemplo 2.2.7, vimos que se K é uma extensão finita de $\mathbb{Q}_p$ contendo uma raiz p-ésima da unidade e $K(p)$ é a p-extensão galoisiana maximal de K, então $\mathrm{Gal}(K(p)/K)$ é um grupo de Dëmushkin. O problema inverso de Galois para grupos de Dëmushkin e corpos com raízes da unidade ainda está em aberto:

(**Pr2**) Dado um grupo de Dëmushkin G, existe um corpo K(não necessariamente p-ádico) contendo uma raíz p-ésima primitiva da unidade tal que o grupo de Galois Gal$(K(p)/K)$ da p-extensão galoisiana maximal $K(p)$ de K é isomorfo a G?

Sejam G e G' dois grupos topológicos e $\varphi, \psi \colon G \to G'$ dois homomorfismos contínuos. Dizemos que φ e ψ são equivalentes se existe um automorfismo contínuo $\alpha \colon G \to G$ tal que $\varphi = \psi \circ \alpha$. Em [Hem76, Teo. 14.6], J. Hempel demonstrou que a conjectura de Poincaré tridimensional ([Hem76, Conj. 3.5]) é verdadeira se, e somente se, dado um grupo fundamental $\pi_1(\Sigma_g)$ de uma superfície fechada, compacta, conexa, orientável e de gênero g, existe um único homomorfismo sobrejetor de $\pi_1(\Sigma_g)$ no produto cartesiano $\Gamma \times \Gamma$ de dois grupos abstratos livres de posto g a menos de equivalência (considerando $\pi_1(\Sigma_g)$ e $\Gamma \times \Gamma$ como grupos discretos).

Com a resposta afirmativa para a conjectura de Poincaré tridimensional por G. Perelman em [Per02], foi demonstrado que grupos de superfície orientável possuem um único epimorfismo $\pi_1(\Sigma_g) \to \Gamma \times \Gamma$ a menos de equivalência. Assim, estendemos o questionamento ao seu completamento pro-p:

(**Pr3**) (Conjectura de Poincaré pro-p) Sejam G um grupo de Dëmushkin com invariantes $q(G) = 0$ e $d(G) = 2g$ e F o grupo pro-p livre sobre g geradores topológicos. Existe apenas uma classe de equivalência de homomorfismos sobrejetores $G \to F \times F$?

Um isomorfismo $\varphi \colon U \to V$ entre dois subgrupos abertos de um grupo profinito G é dito um automorfismo virtual de G. Dizemos que dois automorfismos virtuais são equivalentes se eles coincidem em um subgrupo aberto de G. Em [BEW11], o comensurador abstrato Comm(G) de um grupo profinito G foi definido como o grupo de classes de equivalências de automorfismos virtuais de G sob a operação de composição. Os comensuradores de um grupo profinito G são importantes ferramentas para capturar a rigidez de G com respeito aos seus subgrupos abertos. Entretanto, a estrutura de Comm(G) não é conhecida para diversas classes de grupos G. Se G é um grupo de Dëmushkin solúvel, então Comm(G) foi descrito em [BEW11, Teo. 3.12], e, portanto, propomos:

(**Pr4**) Descrever Comm(G) para um grupo de Dëmushkin não solúvel G.

Referências

[AJZ20] ANTOLÍN, Y. e JAIKIN-ZAPIRAIN, A.: *The Hanna Neumann conjecture for surface groups*. Pré-publicação. Disponível em https://matematicas.uam.es/~andrei.jaikin/preprints/HNsurface.pdf. Acessado em 22 de outubro de 2020, 2020.

[And68] ANDOZHSKII, I.: On subgroups of Demushkin groups. **Matematicheskie Zametki**, v. 4:p. 349–354, 1968.

[And73] ANDOZHSKII, I.: Demushkin groups. **Matematicheskie Zametki**, v. 14:p. 121–126, 1973.

[And74] ANDERSON, M.: Exactness properties of profinite completion functors. **Topology**, v. 13(n. 3):p. 229–239, 1974.

[Bau62] BAUMSLAG, G.: On generalised free products. **Mathematische Zeitschrift**, v. 78(n. 1):p. 423–438, 1962.

[Bau65] BAUMSLAG, B.: Intersections of finitely generated subgroups in free groups. **Journal of the London Mathematical Society**, v. 41(n. 1):p. 673–679, 1965.

[BEW11] BARNEA, Y., ERSHOV, M. e WEIGEL, T.: Abstract commensurators of profinite groups. **Transactions of the American Mathematical Society**, v. 363(n. 10):p. 5381–5417, 2011.

[BLLS14] BERGERON, N., LINNELL, P., LÜCK, W. e SAUER, R.: On the growth of Betti numbers in p-adic analytic towers. **Groups, Geometry, and Dynamics**, v. 8(n. 2):p. 311–329, 2014.

[BNW71] BINZ, E., NEUKIRCH, J. e WENZEL, G.: A subgroup theorem for free products of pro-finite groups. **Journal of Algebra**, v. 19(n. 1):p. 104–109, 1971.

[Bre93] BRENDON, G.: ***Topology and geometry***. Graduate texts in mathematics. Springer-Verlag, Nova Iorque, primeira edição, 1993.

[Bro82] BROWN, K.: ***Cohomology of Groups***. Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag New York, primeira edição, 1982.

[Bru66] BRUMER, A.: Pseudocompact algebras, profinite groups and class formations. **Journal of Algebra**, v. 4(n. 3):p. 442–470, 1966.

[Dav14] DAVIS, M.: Poincaré duality groups. Em *Surveys on surgery theory*, volume volume 1 de *Annals of Math. Studies*, páginas p. 167–193. Princeton University Press, 2014.

[DdSMS03] DIXON, J. D., SAUTOY, M. P. F. DU, MANN, A. e SEGAL, D.: ***Analytic Pro-p Groups***. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, segunda edição, 2003.

[DL83] DUMMIT, D. e LABUTE, J.: On a new characterization of Demuskin groups. **Inventiones mathematicae**, v. 73:p. 413–418, 1983.

[dSSS00] SAUTOY, M. DU, SEGAL, D. e SHALEV, A. (editores): ***New horizons in pro-p groups***, volume 184 de *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Basel, primeira edição, 2000.

[DV96] DICKS, W. e VENTURA, E.: ***The group fixed by a family of injective endomorphisms of a free group***. American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, primeira edição, 1996.

[Dë61] DËMUSHKIN, S.: The group of a maximal p-extension of a local field. **Izv. Akad. Nauk. SSSR, Ser. Mat.**, v. 25(n. 3):p. 329–346, 1961. Em russo.

[Dë63] DËMUSHKIN, S.: On 2-extensions of a local field. **Sib. Mat. Zh.**, v. 4:p. 951–955, 1963. Em russo.

[Dë65] DËMUSHKIN, S.: Topological 2-groups with an even number of generators and a complete defining relation. **Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat.**, v. 29:p. 3–10, 1965. Em russo.

[Eck87] ECKMANN, B.: Poincaré duality groups of dimension two are surface groups. Em *Combinatorial Group Theory and Topology*, Annals of Mathematics Studies, páginas p. 35–52. Princeton University Press, 1987.

[Eil49] EILENBERG, S.: Topological methods in abstract algebra. Cohomology theory of groups. **Bulletin of the American Mathematical Society**, v; 55(n. 1):p. 3–37, 1949.

[Eis95] EISENBUD, D.: ***Commutative Algebra***. Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag New York, primeira edição, 1995.

[Eve91] EVENS, L.: ***The Cohomology of Groups***. Oxford mathematical monographs. Clarendon Press, Londres, 1991.

[Fri15] FRIEDMAN, J.: Sheaves on graphs, their homological invariants, and a proof of the Hanna Neumann conjecture. **Memoirs of the American Mathematical Society**, v. 233(n. 1100), 2015.

[FS59] FADDEEV, D. e SKOPIN, A.: On the proof of a theorem of Kawada. **Dokl. Akad. Nauk SSSR**, v. 127:p. 529–530, 1959. Em russo, Zbl 0099.02604.

[Gre60] GREENBERG, L.: Discrete groups of motions. **Canadian Journal of Mathematics**, v. 12:p. 415–426, 1960.

[Har79] HARRIS, M.: p-adic representations arising from descent on abelian varieties. **Compositio Mathematica**, v. 39(n. 2):p. 177–245, 1979.

[Har00] HARRIS, M.: Correction to p-adic representations arising from descent on abelian varieties. **Compositio Mathematica**, v. 121:p. 105–108, 2000.

[Hat01] HATCHER, A.: ***Algebraic topology***. Cambridge University Press, 2001.

[Hem76] HEMPEL, J.: *3-manifolds*. AMS Chelsea Publishing, primeira edição, 1976.

[How54] HOWSON, A. G.: On the intersection of finitely generated free groups. **Journal of the London Mathematical Society**, v. s1-29(n. 4):p. 428–434, 1954.

[HR87] HERFORT, W. e RIBES, L.: *Subgroups of free pro-p-products*, volume v. 101. Cambridge University Press, 1987.

[Jac53] JACOBSON, N.: ***Lectures in Abstract Algebra***. Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag New York, primeira edição, 1953.

[JZ17] JAIKIN-ZAPIRAIN, A.: Approximations by subgroups of finite index and the Hanna Neumann conjecture. **Duke Mathematical Journal**, v. 166(n. 10):p. 1955–1987, 2017.

[JZS19] JAIKIN-ZAPIRAIN, A. e SHUSTERMAN, M.: The Hanna Neumann conjecture for Demushkin groups. **Advances in Mathematics**, v. 349:p. 1–28, 2019.

[Kap58] KAPLANSKY, I.: Projective Modules. **The Annals of Mathematics**, v. 68(n. 2):p. 372–377, 1958.

[Kap70] KAPLANSKY, I.: "Problems in the theory of rings"revisited. **The American Mathematical Monthly**, v. 77(n. 5):p. 445–454, 1970.

[Kaw54] KAWADA, Y.: On the structure of the Galois group of some infinite extensions. **J. Fac. Sci., Univ. Tokyo, Sect. I**, v. 7:p. 1–18, 87–106, 1954. Zbl 0055.03002.

[KKS00] KATO, K., KUROKAWA, N. e SAITO, T.: *Number Theory 1: Fermat's Dream*. Translations of Mathematical Monographs. American Mathematical Society, primeira edição, 200.

[KZ10] KOCHLOUKOVA, D. e ZALESSKII, P.: Fully residually free pro-p groups. **Journal of Algebra**, v. 324:p. 782–792, 2010.

[KZ11] KOCHLOUKOVA, D. e ZALESSKII, P.: On pro-p analogues of limit groups via extensions of centralizers. **Mathematische Zeitschrift**, v. 267:p. 109–128, 2011.

[Lab66] LABUTE, J.: Demuškin groups of rank $\aleph_0$. **Bulletin de la Société Mathématique de France**, v. 94:p. 211–244, 1966.

[Lab67] LABUTE, J.: Classification of Demuhskin groups. **Canadian Journal of Mathematics**, v. 19:p. 106–132, 1967.

[Laz65] LAZARD, M.: Groupes analytiques p-adiques. **Publications Mathématiques de l'IHÉS**, v. 26:p. 5–219, 1965.

[Lim03] LIMA, E.: ***Fundamental groups and covering spaces***. A K Peters, Massachusetts, 2003.

[Lub82] LUBOTZKY, A.: Combinatorial group theory for pro-p groups. **Journal of Pure and Applied Algebra**, v. 25(n. 3):p. 311–325, 1982.

[Mel90] MEL'NIKOV, O: Subgroups and the homology of free products of profinite groups. **Mathematics of the USSR-Izvestiya**, v. 34(n. 1):p. 97–119, 1990.

[Min12] MINEYEV, I.: Submultiplicativity and the Hanna Neumann Conjecture. **Annals of Mathematics**, 175(1):p. 393–414, 2012.

[Neu57] NEUMANN, H. N.: On the intersection of finitely generated free groups. Addendum. **Publicationes Mathematicae Debrecen**, Volume 5, 1957.

[NSW08] NEUKIRCH, J., SCHMIDT, A. e WINGBERG, K.: ***Cohomology of Number Fields***. Springer Berlin Heidelberg, primeira edição, 2008.

[Per02] PERELMAN, G.: *The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications*. Pré-publicação. Disponível em https://arxiv.org/abs/math/0211159. Acessado em 29 de janeiro de 2020, 2002.

[Rib17] RIBES, L.: ***Profinite graphs and groups***, volume 66 de *A Series of Modern Surveys in Mathematics*. Springer International Publishing, Suíça, primeira edição, 2017.

[RZ10] RIBES, L. e ZALESSKII, P.: ***Profinite groups***. Springer-Verlag, Berlim, segunda edição, 2010.

[Sco78] SCOTT, P.: Subgroups of surface groups are almost geometric. **Journal of the London Mathematical Society**, v. s2-17:p. 555–565, 1978.

[Ser64] SERRE, J.-P.: Structure de certains pro-p-groupes. Em *Séminaire Bourbaki : années 1962/63 - 1963/64, exposés 241-276*, número 8 em *Séminaire Bourbaki*, páginas 145–155. Société mathématique de France, 1964. talk:252.

[Ser65] SERRE, J.-P.: Sur la dimension cohomologique des groupes profinis. **Topology**, v. 3:p. 413–420, 1965.

[Ser70] SERRE, J.-P.: *Cours d'arithmétique*. Presses Universitaires de France, quarta edição, 1970.

[Ser97] SERRE, J.-P.: ***Cohomologie galoisienne***. Springer, Berlim, quinta edição, 1997.

[Ser17] SERRE, J.-P.: ***Finite groups: an introduction***. International Press, 2017.

[Sha47] SHAFAREVITCH, I.: On p-extensions. **Rec. Math. [Mat. Sbornik] N.S.**, v. 20(n. 62):p. 351–363, 1947.

[Sko55] SKOPIN, A.: p-extensions of a local field containing roots of unity of degree p^m. **Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat**, v. 19:p. 455–470, 1955. Em russo.

[Sol96] SOLZHENITSYN, A.: *The Oak and the Calf*. Consentimento, segunda edição, 1996. Em russo: СОЛЖЕНИЦЫН, А.: Бодался Телёнок с Дубом. Согласие, 1996.

[ST80] SEIFERT, H. e THRELFALL, W.: ***Seifert and Threlfall: a textbook of topology. Seifert: Topology of 3-dimensional fibered spaces.*** Pure and applied mathematics, a series of monographs and textbooks. Academic Press, Nova Iorque, 1980.

[SZ19] SHUSTERMAN, M. e ZALESSKII, P.: Virtual retraction and Howson's theorem in pro-p groups. **Transactions of the American Mathematical Society**, v. 373(n. 3):p. 1501–1527, 2019.

[VVZ94] VLADIMIROV, V., VOLOVICH, I. e ZELENOV, E.: ***p-Adic Analysis and Mathematical Physics***. World Scientific, primeira edição, abril 1994.

[Win84] WINGBERG, K.: Ein Analogon zur Fundamentalgruppe einer Riemann'schen Fläche im Zahlkörperfall. **Inventiones Mathematicae**, v. 77(n. 3):p. 557–584, 1984.

[WZ17] WEIGEL, T. e ZALESSKII, P.: Virtually free pro-p products. **Israel Journal of Mathematics**, v. 221:p. 425–434, 2017.

[Yam93] YAMAGISHI, M.: On the center of Galois groups of maximal pro-p extensions of algebraic number fields. **Journal für die reine und angewandte Mathematik**, v. 436:p. 197–208, 1993.

[ZZ20] ZALESSKII, P. e ZAPATA, T.: Profinite extensions of centralizers and the profinite completion of limit groups. **Revista Matemática Iberoamericana**, v. 36(n. 1):p. 61–78, 2020.

Apêndice A

Álgebra linear

O propósito deste apêndice é reunir alguns resultados sobre formas simpléticas definidas em módulos livres sobre anéis locais, os quais não conseguimos obter de uma única fonte na literatura. No Capítulo 2, necessitaremos de tais resultados sobre a existência de bases simpléticas para obtermos a classificação dos grupos de Dëmushkin em três classes de apresentações seguindo [Lab67], e no Capítulo 4 utilizaremos os resultados Seção A.2 para provar que grupos de Dëmushkin não solúveis satisfazem a propriedade de retração virtual (seguindo [SZ19]).

Ao longo desta seção, R denotará um anel associativo, comutativo e unitário com um único ideal maximal $\mathfrak{m}$, *i.e.* um anel *local*. Um R-módulo à esquerda M é um grupo abeliano sobre o qual R age à esquerda por endomorfismos. Nesta seção, iremos sempre supor que R age à esquerda sobre seus módulos. A exposição seguirá principalmente à dada em [SZ19], com a exceção do Teorema A.1.8, que é uma adaptação da discussão presente em [Jac53, p. 170] necessária para a classificação dos grupos de Dëmushkin do Capítulo 2.

O resultado mais importante acerca destes anéis que utilizaremos é o famoso Lema de Nakayama, que enunciaremos sem demonstração:

Lema A.0.1 (Lema de Nakayama [Eis95, Cor. 4.8])**.** *Sejam R um anel local com ideal maximal $\mathfrak{m}$ e M um R-módulo finitamente gerado.*

(a) Se $\mathfrak{m}M = M$, então $M = 0$.

(b) Se $c_1, \cdots, c_n \in M$ são tais que as classes $\{c_i + \mathfrak{m}M\}_{i=1}^n$ geram o quociente $M/\mathfrak{m}M$, então os elementos c_i geram o módulo M como R-módulo.

Os principais exemplos de anéis locais que consideraremos são os anéis de congruência finitos $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ para algum $q = p^f \in \mathbb{Z}$ com $f \geq 1$, cujo ideal maximal é $\mathfrak{m} = p\mathbb{Z}/q\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}/p^{f-1}\mathbb{Z}$, e o anel dos inteiros p-ádicos $\mathbb{Z}_p$, com ideal maximal $\mathfrak{m} = p\mathbb{Z}_p$. Utilizando a convenção de que $p^\infty = 0$, podemos abarcar ambas estas classes de anéis através da única notação $R = \mathbb{Z}_p/q\mathbb{Z}_p$ para algum $q = p^f$ com $1 \leq f \leq \infty$.

A.1 Bases simpléticas

Seja R um anel local com ideal maximal $\mathfrak{m}$, seja $\kappa = R/\mathfrak{m}$ seu corpo de resíduos e p sua característica. Seja M um R-módulo livre não-trivial finitamente gerado.

Definição A.1.1. Uma forma bilinear $\omega\colon M \times M \to R$ é chamada simplética se ela for antissimétrica e não degenerada:

(a) Para quaisquer $a, b \in M$, temos $\omega(a, b) = -\omega(b, a)$.

(b) Para alguma (equivalentemente, para toda) base $c_1, \cdots, c_n$ de M sobre R temos $\det(\omega(c_i, c_j)) \in R^\times$.

Note que se $p \neq 2$, então a condição (a) é equivalente a ω ser uma forma bilinear alternada, isto é, $\omega(a, a) = 0$ para todo $a \in M$. Em geral, uma forma ser antissimétrica é uma condição mais fraca do que ser uma forma alternada.

Como $\omega(\mathfrak{m}M, M) = \omega(M, \mathfrak{m}M) = \mathfrak{m}\omega(M, M)$, temos que ω também induz uma forma simplética em $M_\kappa = M/\mathfrak{m}M$.

Definição A.1.2. Seja M um R-módulo livre de dimensão $n = 2t > 0$, e ω uma forma simplética definida em M. Dizemos que uma base $a_1, b_1, \cdots, a_t, b_t$ de M sobre R é uma base simplética se, para quaisquer i, j com $i \neq j$ e $1 \leq i, j \leq t$, ela satisfaz as duas condições:

$$\omega(a_i, b_i) = 1\,,$$

$$\omega(a_i, a_j) = \omega(b_i, b_j) = \omega(a_i, b_j) = 0\,.$$

Note que $\omega(a, b) = 0$ se, e somente se, $\omega(b, a) = 0$. Então, dado um submódulo N de M, denotamos por $N^\perp$ o submódulo ortogonal:

$$N^\perp = \{b \in M \mid \omega(a, b) = 0\,, \quad \forall a \in N\}\,.$$

Proposição A.1.3 ([SZ19, Prop. 2.1])**.** *Para todo subespaço não degenerado L de M_κ (isto é, $\omega_{|L\times L}$ é não degenerada), temos que $L^\perp$ é não degenerado e $L \oplus L^\perp = M_\kappa$. Em particular, se M_κ e L ambos possuem dimensão par então a dimensão de $L^\perp$ também é par. Neste caso, se $a_1, b_1, \cdots, a_s, b_s$ e $a_{s+1}, b_{s+1}, \cdots, a_t, b_t$ são bases simpléticas de L e $L^\perp$ respectivamente, então $a_1, b_1, \cdots, a_t, b_t$ é uma base simplética de M_κ.*

Demonstração. Considere o homomorfismo $M_\kappa \to L^*$ dado por:

$$a \mapsto (b \mapsto \omega(a,b))\,.$$

Como ω é não degenerada, este homomorfismo é sobrejetivo, pois é a composição do isomorfismo $M_\kappa \to M_\kappa^*$ com a aplicação dual $M_\kappa^* \to L^*$. Seu núcleo é precisamente $L^\perp$, de onde obtemos a igualdade $\dim_\kappa L^\perp = n - \dim_\kappa L$. Como L é não degenerado se, e somente se, $L \cap L^\perp = 0$, segue que $L \oplus L^\perp = M_\kappa$ e que $L^\perp$ é não degenerado pois $\det(\omega) = \det(\omega_{|L})\det(\omega_{|L^\perp})$. Disto é claro que $a_1, b_1, \cdots, a_t, b_t$ é uma base simplética para M_κ. $\square$

Proposição A.1.4 ([SZ19, Prop. 2.2 e 2.3])**.** *Seja M um R-módulo livre de dimensão $n = 2t > 0$. O espaço vetorial M_κ sempre possui uma base simplética. Além disso, todo vetor não nulo em M_κ pode ser estendido a uma base simplética.*

Demonstração. Mantendo a notação, prosseguiremos por indução sobre t. Para $n = 2t = 2$, assumamos que M_κ é gerado por uma base $\{u, v\}$. Seja $U = \langle u \rangle$ o subespaço de dimensão 1 gerado por u. Como ω é não degenerada, sabemos também que $U^\perp \neq M_\kappa$. Assim, existe um $z \in M_\kappa$ que não pertence a U nem a $U^\perp$. Como $\omega(u,z)$ é invertível em κ, temos que $\{u, \omega(u,z)^{-1}z)\}$ é uma base simplética para M_κ.

Seja agora $n = 2t > 2$, e provaremos que M_κ possui um subespaço não degenerado de dimensão 2. Se existir $u \neq 0$ em M_κ tal que $\omega(u,u) = 0$, então também existe $v \in M_\kappa$ tal que $\omega(u,v) \neq 0$, e neste caso o subespaço U gerado por $\{u, v\}$ é não degenerado. Se, por outro lado, para todo $u \neq 0$ em M_κ tem-se que $\omega(u,u) \neq 0$, tomemos dois vetores linearmente independentes u e v' em M_κ. Defina $v = v' - \omega(u,v')\omega(u,u)^{-1}u$. Assim, novamente temos que $U = \langle u, v \rangle$ é um subespaço não degenerado de dimensão 2.

Pela hipótese de indução e pela Proposição A.1.3, temos que U e $U^\perp$ ambos possuem bases simpléticas, e portanto o mesmo vale para M_κ. Para a última parte, note que nada na demonstração muda se o vetor u é tomado fixo. $\square$

Veremos como levantar uma base simplética de M_κ à uma base simplética de M:

Proposição A.1.5 ([SZ19, Prop. 2.6])**.** *Sejam $a_1, b_1, \cdots, a_t, b_t$ uma base simplética de M_κ. Então, esta base pode ser levantada a uma base simplética $A_1, B_1, \cdots, A_t, B_t$ de M sobre R. Além disso, esta base pode ser tomada escolhendo B_1 um levantamento fixo de b_1. Em particular, todo vetor fora de $\mathfrak{m}M$ pode ser estendido a uma base simplética.*

Demonstração. Tome $A_1, B_2, \cdots, A_t, B_t$ qualquer levantamento de $a_1, b_1 \cdots, a_t, b_t$ para M sobre R. Por hipótese, para quaisquer $1 \leq i \neq j \leq t$ vale que:

$$\omega(A_i, B_i) \in 1 + \mathfrak{m}\,,$$

$$\omega(A_i, B_j), \omega(A_i, A_j), \omega(B_i, B_j) \in \mathfrak{m}\,.$$

Como R é um anel local, todos os elementos de $1 + \mathfrak{m}$ são invertíveis. Precisamos agora garantir que $\omega(B_i, B_1) = \omega(A_i, B_1) = 0$ para todo $i > 1$. Uma vez que $\omega(A_1, B_1) \in 1 + \mathfrak{m}$, podemos substituir A_i por $A_i - \omega(A_i, B_1)\omega(A_1, B_1)^{-1}A_1$ e B_i por $B_i - \omega(B_i, B_1)\omega(A_1, B_1)^{-1}A_1$ para $i > 1$, nos dando a ortogonalidade desejada sem alterar o fato de que esta base se reduz para $a_1, b_1, \cdots, a_t, b_t$ módulo $\mathfrak{m}R$.

Seja $V = \langle a_2, b_2, \cdots, a_t, b_t\rangle$ em M_κ. Como ω é representado na base simplética de M_κ por uma matriz da forma

$$\begin{pmatrix} \omega_{|\langle a_1, b_1\rangle} & 0 \\ 0 & \omega_{|V} \end{pmatrix},$$

temos de $\det(\omega_{|V}) \neq 0$ e portanto sua matriz T em V é invertível. Seja

$$w = (\omega(A_1, A_2), \omega(A_1, B_2), \cdots, \omega(A_1, A_t), \omega(A_1, B_t)) \in \mathfrak{m}^{n-2}\,,$$

e tome $v^T = w^T T^{-1} = (\alpha_2, \beta_2, \cdots, \alpha_t, \beta_t)$. Temos então as igualdades:

$$\omega(A_1, A_i) = \sum_{j=2}^{t} \alpha_j \omega(A_j, A_i) + \sum_{j=2}^{t} \beta_j \omega(B_j, A_i)\,,$$

$$\omega(A_1, B_i) = \sum_{j=2}^{t} \alpha_j \omega(A_j, B_i) + \sum_{j=2}^{t} \beta_j \omega(B_j, B_i)\,.$$

Substituímos A_1 por $A_1 - \alpha_2 A_2 - \beta_2 B_2 \cdots - \alpha_t A_t - \beta_t B_t$ nos fornece as ortogonalidades $\omega(A_1, A_i) = \omega(A_1, B_i) = 0$ para todo $i > 1$. Por fim, substituíndo A_1 novamente por $\omega(A_1, B_1)^{-1}A_1$, obtemos que $\omega(A_1, B_1) = 1$.

Seja agora $L = \langle A_2, B_2, \cdots, A_t, B_t\rangle$ em M. Como L e $\langle A_1, B_1\rangle$ são ortogonais, podemos concluir que L é não degenerado. Após repetirmos o processo anterior $t - 1$ vezes, obtemos a base simplética desejada para M. Observe que nenhuma alteração foi feita em B_1, que pode ser tomado fixo durante toda a demonstração. $\square$

A seguinte adaptação das proposições anteriores será útil para trabalharmos com formas simpléticas em grupos de cohomologia:

Corolário A.1.6. *Sejam M um R-módulo livre de dimensão $n = 2t > 0$ e $\omega\colon M \times M \to R$ uma forma simplética tal que sua redução para M_κ seja alternada. Para todo funcional $f\colon M \to R$ tal que $f(M) \not\subseteq \mathfrak{m}$, existe uma base simplética $A_1, B_1, \cdots, A_t, B_t$ de M tal que $f(A_i) = \delta_{1i}$ e $f(B_i) = 0$ para todo $1 \leq i \leq n$.*

Demonstração. Como $f(M) \not\subseteq \mathfrak{m}$, o elemento $f = f_1$ pode ser completado a uma base $\{f_i \mid 1 \leq i \leq n\}$ de $\mathrm{Hom}_R(M, R)$. Tome $y_1, \cdots, y_n$ a base dual em M e aplique os procedimentos das Proposições A.1.4 e A.1.5 com as seguintes alterações:

Como ω e sua redução módulo $\mathfrak{m}$ são não degeneradas e a redução é alternada, temos que $\omega(y_1, y_i) \neq 0$ para algum índice $i \geq 2$ e, portanto, após permutarmos os índices e multiplicarmos por um invertível, podemos assumir que $\omega(y_1, y_2) = 1$. Pela substituição $y_i \to y_i - \omega(y_1, y_i)y_2$ para $i \geq 3$, podemos assumir que $\omega(y_1, y_i) = 0$ sempre que $i \geq 3$. Prosseguimos normalmente como nas Proposições A.1.4 e A.1.5 para transformarmos $\{y_3, \cdots, y_n\}$ em uma base simplética $\{x_3, \cdots, x_n\}$ para a qual ainda vale

$$f(x_i) = 0 = \omega(y_1, x_i)\,, \quad \forall 3 \leq i \leq n\,,$$

uma vez que os x_i serão dados por combinações lineares dos y_i. Tomamos $x_1 = y_1$ e x_2 como:

$$\begin{aligned} x_2 &= y_2 + \sum_{t=2}^{n/2} (-\omega(y_2, x_{2t})x_{2t-1} + \omega(y_2, x_{2t-1})x_{2t}) \\ &= y_2 - \omega(y_2, x_4)x_3 + \omega(y_2, x_3)x_4 - \cdots - \omega(y_2, x_n)x_{n-1} + \omega(y_2, x_{n-1})x_n \end{aligned}$$

Desta forma, ainda temos $f(x_2) = 0$ e $\{x_i \mid 1 \leq i \leq n\}$ forma a base simplética desejada. $\square$

Precisamos do seguinte lema para fazermos uma importante distinção entre os casos $p = 2$ e $p \neq 2$:

Lema A.1.7. *Se a forma simplética ω for alternada, então dimensão de M sobre R é par. A dimensão de M é sempre par se $2 \neq 0$ em R, caso no qual a forma induzida em M_κ é alternada. Em particular, a dimensão de M é sempre par se $p \neq 2$.*

Demonstração. Provaremos por indução sobre t que toda forma simplética em um espaço de dimensão $n = 2t + 1$ não é alternada, isto é, existe $v \in M$ tal que $\omega(v, v) \neq 0$. Basta encontrarmos tal v em M_κ, uma vez qualquer levantamento deste para M também satisfará esta condição. Para o caso $t = 0$, isto é equivalente com ω ser não degenerada. Suponha então que $n \geq 3$ e tome qualquer $v \in M_\kappa$ não nulo. Como ω é não degenerada, existe $w \in M$ tal que $\omega(v, w) \neq 0$. Se w não for um múltiplo de v, então a restrição de ω ao subespaço $L = \langle v, w\rangle$ é não degenerada. Pela Proposição A.1.3, sabemos então que $L^\perp$ é um subespaço não degenerado de dimensão $n - 2$, sobre o qual aplicamos a hipótese de indução.

Como observado anteriormente, toda forma bilinear antissimétrica é alternada em característica ímpar. Se $p = 2$ e $2 \neq 0$ em R, então pode acontecer da forma simplética ω

não ser alternada em M. Neste caso, afirmamos que a forma simplética é sempre alternada sobre M_κ, cuja dimensão sobre κ coincide com a dimensão de M sobre R.

Suponha, por contradição, que exista $v \in M_\kappa$ tal que $\omega(v,v) = a \neq 0$, e seja $u \in M$ um levantamento de v. Assim, $\omega(u,u) = a + m$ para algum $m \in \mathfrak{m}$ e portanto:

$$2(a+m) = 2\omega(u,u) = 0\,.$$

Desta forma, como $2 \neq 0$, $a+m$ é um divisor de zero em R. Uma vez que R é um anel local, isto significa que $a+m \in \mathfrak{m}$, contradizendo nossa hipótese de que $a \not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{m}}$. Assim, ω é alternada em M_κ e portanto $\dim_\kappa M_\kappa = \dim_R M \in 2\mathbb{Z}$. $\square$

Especializaremos agora no caso em que $R = \mathbb{Z}_p/q\mathbb{Z}_p$ para algum $q = p^f$ com $1 \leq f \leq \infty$. Neste caso, podemos dizer mais sobre a estrutura de M:

Teorema A.1.8. *Sejam $q = p^f$ ($1 \leq f \leq \infty$), $R = \mathbb{Z}_p/q\mathbb{Z}_p$ e M um R-módulo livre finitamente gerado de dimensão $n \geq 1$, e seja $\omega\colon M \times M \to R$ uma forma simplética. Então, existe uma base $c_1, \cdots, c_n$ de M sobre R tal que:*

(I) *Se n for par, os pares $a_i = c_{2t-1}$ e $b_i = c_{2t}$ com $1 \leq t \leq \frac{n}{2}$ formam uma base simplética para M, isto é:*

$$\omega(a_i, b_i) = 1 = -\omega(b_i, a_i)$$

e todos os outros produtos de elementos distintos da base são zero.

(II) *Se n for ímpar, então $\omega(c_1, c_1) = 1$ e os pares $a_i = c_{2t}$ e $b_i = c_{2t+1}$ com $1 \leq t \leq \frac{n-1}{2}$ formam uma base simplética para $L = \langle c_1 \rangle^\perp$, isto é:*

$$\omega(a_i, b_i) = 1 = -\omega(b_i, a_i)\,, \quad \omega(c_1, a_i) = \omega(c_1, b_i) = 0$$

e todos os outros produtos de elementos distintos da base em L são zero.

No caso (I)*, o elemento c_1 pode ser escolhido de forma arbitrária, e no caso* (II)*, o elemento c_1 pode ser qualquer elemento tal que $\omega(c_1, c_1) = 1$. Além disto, se $q = 2$ e ω não for alternada, podemos assumir que $\omega(c_i, c_i) = \delta_{1i}$ para todo $1 \leq i \leq n$.*

Demonstração. O caso (I) dado por n par é tratado pela Proposição A.1.5. Para o caso (II), o Lema A.1.7 garante que $p = 2$ e que $2 = 0$ em R, e portanto $R = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Como neste caso ω não é alternada, existe $c \in M$ tal que $\omega(c,c) = 1$. Assim, pela Proposição A.1.3, $\langle c \rangle^\perp$ é não degenerado e de dimensão par, para o qual a parte (I) se aplica.

Para a parte final, suponha que $q = 2$ e ω não seja alternada. Se n for ímpar, então temos que o subespaço $\langle a_i, b_i \rangle$ é não degenerado e portanto sua matriz

$$\begin{pmatrix} \omega(a_i, a_i) & \omega(a_i, b_i) \\ \omega(b_i, a_i) & \omega(b_i, b_i) \end{pmatrix}$$

possui determinante não nulo. Como $\omega(a_i, b_i) = \omega(b_i, a_i) = 1$, isto significa que pelo menos um dos elementos em $\{\omega(a_i, a_i), \omega(b_i, b_i)\}$ se anula. Suponhamos, sem perda de generalidade, que $\omega(a_i, a_i) = 0$. Após a troca de variáveis $b_i \to b_i + \omega(b_i, b_i)a_i$ obtemos um novo par a_i, b_i tal que:

$$\omega(a_i, b_i) = \omega(b_i, a_i) = 1\,, \quad \omega(a_i, a_i) = \omega(b_i, b_i) = 0\,.$$

Se n for par, após uma permutação dos elementos da base podemos assumir que $\omega(a_1, a_1) = 1$. Novamente, a expressão

$$\det \begin{pmatrix} \omega(a_1, a_1) & \omega(a_1, b_1) \\ \omega(b_1, a_1) & \omega(b_1, b_1) \end{pmatrix} \neq 0$$

garante que $\omega(b_i, b_i) = 0$. Para $i > 1$, utilizamos a mesma troca de variáveis do caso n par para garantir que $\omega(a_i, a_i) = \omega(b_i, b_i) = 0$. □

A.2 Submódulos isotrópicos

Sejam R um anel local com ideal maximal $\mathfrak{m}$ e corpo resíduos $\kappa = R/\mathfrak{m}$, p a característica de κ, M um R-módulo livre e $\omega\colon M \times M \to R$ uma forma simplética. Denotamos o κ-espaço vetorial $M/\mathfrak{m}M$ por M_κ.

Definição A.2.1. Um submódulo N de M é dito *isotrópico* se $\omega(a, b) = 0$ para todo a, b em N.

Lema A.2.2 ([SZ19, Lem. 2.4])**.** *A dimensão de qualquer subespaço isotrópico de M_κ é no máximo t.*

Demonstração. Suponhamos que $c_1, \cdots, c_{t+1}$ seja uma base para um subespaço isotrópico de M_κ, e complete-a em uma base $c_1, \cdots, c_n$ de M_κ. Considere a matriz $A = (\omega(c_i, c_j))$. Pela fórmula de Leibniz para o determinante, temos:

$$\det(A) = \sum_{\rho \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} \omega(c_i, c_{\sigma i})\,.$$

Como para todo $\sigma \in S_n$ existe pelo menos $i \leq t+1$ tal que $\sigma(i) \leq t+1$, a fórmula anterior nos dá $\det(A) = 0$, contradizendo a hipótese de que ω é não degenerada. $\square$

Vejamos agora que há uma conexão entre os subespaços isotrópicos e as bases simpléticas.

Proposição A.2.3 ([SZ19, Prop. 2.5]). *Seja N um subespaço isotrópico de M_κ e sejam $b_1, \cdots, b_s$ uma base de N. Então, esta base pode ser completada a uma base simplética $a_1, b_1, \cdots, a_t, b_t$ de M_κ.*

Demonstração. Lembremos que $s \leq t$ pelo Lema A.2.2. A estratégia será construir um subespaço L de M_κ de dimensão $2s$, não degenerado, com uma base simplética contendo $b_1, \cdots, b_s$, de forma que a Proposição A.1.3 nos garanta a existência da base desejada para M_κ.

Construiremos indutivamente os elementos a_i para uma base $a_1, b_1, \cdots, a_s, b_s$ do nosso subespaço L. Para o passo base, notemos que o fato de ω não ser degenerada e os elementos b_i serem linearmente independentes nos fornece a existência de $a_1 \in M_\kappa$ tal que $\omega(a_1, b_1) \neq 0$. Após corrigirmos a_1 por algum fator escalar, podemos assumir que $\omega(a_1, b_1) = 1$. Note que $\{a_1\} \cup \{b_1, \cdots, b_s\}$ continua linearmente independente, uma vez que N é isotrópico.

Suponhamos agora que para $i < r \leq s$ já conseguimos elementos a_i tais que

$$\{a_1, \cdots, a_{r-1}, b_1, \cdots, b_s\} \tag{A.1}$$

sejam linearmente independentes e, para todo trio i, j, k com $k \neq i \neq j$, $1 \leq i, k < r$ e $1 \leq j \leq s$, satisfaçam:

$$\omega(a_i, b_i) = 1\,, \quad \omega(a_i, a_k) = 0 \quad \text{e} \quad \omega(a_i, b_j) = 0\,.$$

Novamente, como ω é não degenerada e o conjunto (A.1) é linearmente independente, obtemos um elemento $a_r \in M_\kappa$ tal que $\omega(a_r, b_r) \neq 0$. Após corrigirmos a_r por um elemento de M_κ, podemos supor que $\omega(a_r, b_r) = 1$. Esta equação garante assim que a_r é linearmente independente do conjunto (A.1). Logo, após feitas as correções do tipo $a_r \mapsto a_r - \omega(a_i, a_r)b_i$ e $a_r \mapsto a_r - \omega(a_r, b_i)a_i$, obtemos o elemento a_r satisfazendo as condições acima. Por indução, obtemos um subespaço L de M_κ munido de uma base simplética $a_1, b_1, \cdots, a_s, b_s$. Uma vez mais, a fórmula de Leibniz nos dá que $\det(\omega_{|L\times L}) = 1$, e portanto L é um subespaço não degenerado. O resultado segue então da Proposição A.1.3. $\square$

Apêndice B

Apresentações de módulos profinitos

Utilizaremos dos grupos de homologia $H_0(G, M)$ e $H_1(G, M)$ para caracterizar as apresentações de um G-módulo profinito M como quociente de um G-módulo livre. Em dimensão 0, as Proposições 1.2.1 e 1.2.4, combinadas, já demonstram que:

Proposição B.1.1. *Sejam G um grupo pro-p topologicamente finitamente gerado e M um $[[\mathbb{F}_pG]]$-módulo profinito. Então, M é finitamente gerado (como $[[\mathbb{F}_pG]]$-módulo) se, e somente se, seu quociente coinvariante $M_G = H_0(G, M)$ possui dimensão finita sobre $\mathbb{F}_p$. Equivalentemente, M é finitamente gerado se, e somente se, $((IG))M$ é um G-submódulo aberto de M.* $\square$

Definição B.1.2. Dizemos que um $[[\mathbb{F}_pG]]$-módulo profinito M é *finitamente relacionado* se $\dim_{\mathbb{F}_p} H_1(G, M) < \infty$, e que um $[[\mathbb{F}_pG]]$-módulo profinito M é *finitamente apresentado* se M for finitamente gerado e relacionado. O número natural $\dim_{\mathbb{F}_p} H_1(G, M)$ de um $[[\mathbb{F}_pG]]$-módulo finitamente relacionado M é dito seu *número de relações* sobre G. Em particular, o G-módulo profinito M é 1-relacionado se $\dim_{\mathbb{F}_p} H_1(G, M) = 1$.

Note que um $[[\mathbb{F}_pG]]$-módulo profinito M é finitamente apresentado se, e somente se, existe um conjunto gerador finito minimal S e uma sequência exata curta de $[[\mathbb{F}_pG]]$-módulos

$$0 \to N \to F(S) \to M \to 0$$

onde $F(S)$ é o $[[\mathbb{F}_pG]]$-módulo livre sobre o conjunto S e N é finitamente gerado, uma vez que $H_1(G, M) \simeq H_0(G, N)$. Também vale que a propriedade de ser finitamente apresentado é hereditária para submódulos abertos quando G é um grupo finitamente apresentado:

Proposição B.1.3 ([JZS19, Prop. 2.1])**.** *Suponha que G seja um grupo pro-p finitamente gerado (respectivamente, relacionado) e M seja um $[[\mathbb{F}_pG]]$-módulo finitamente gerado* *(respectivamente, relacionado). Então, todo $[[\mathbb{F}_p G]]$-submódulo aberto de M também é finitamente gerado (respectivamente, relacionado).*

Demonstração. Se U é um $[[\mathbb{F}_p G]]$-submódulo aberto de M, prosseguindo por indução sobre a codimensão de U em M sobre $\mathbb{F}_p$ basta demonstrarmos o caso em que $M/U \simeq \mathbb{F}_p$. A sequência exata curta

$$0 \to U \to M \to \mathbb{F}_p \to 0$$

induz uma sequência exata longa

$$\cdots \to H_2(G) \to H_1(G,U) \to H_1(G,M) \to H_1(G) \to H_0(G,U) \to H_0(G,M) \to \cdots$$

Assim, podemos inferir as desigualdades:

$$\dim_{\mathbb{F}_p} H_0(G,U) \leq \dim_{\mathbb{F}_p} H_0(G,M) + \dim_{\mathbb{F}_p} H_1(G)\,,$$

$$\dim_{\mathbb{F}_p} H_1(G,U) \leq \dim_{\mathbb{F}_p} H_1(G,M) + \dim_{\mathbb{F}_p} H_2(G)\,. \qquad \square$$

Agora, vejamos alguns exemplos de G-módulos possivelmente finitamente relacionados para diversas classes de grupos G. Para todo subgrupo fechado $H \leq_c G$, seja $((IH))$ o núcleo do $[[\mathbb{F}_p G]]$-homomorfismo $[[\mathbb{F}_p G]] \to [[\mathbb{F}_p(G/H)]]$. Dizemos que $((IH))$ é o ideal de aumento de $[[\mathbb{F}_p G]]$ relativo a $[[\mathbb{F}_p(G/H)]]$. Se S é um conjunto de geradores topológicos para H, então $\{1 - s \mid s \in S\}$ é um conjunto de geradores para $((IH))$. Assim, se H é topologicamente finitamente gerado, então $[[\mathbb{F}_p(G/H)]]$ é um $[[\mathbb{F}_p G]]$-módulo finitamente apresentado. Em particular, $\mathbb{F}_p$ é um $[[\mathbb{F}_p G]]$-módulo finitamente apresentado para todo grupo pro-p topologicamente finitamente gerado G.

Proposição B.1.4 ([JZ17, Lem. 3.1 e Prop. 3.4])**.** *Sejam F um grupo pro-p livre topologicamente finitamente gerado e P um $[[\mathbb{F}_p F]]$-submódulo de $[[\mathbb{F}_p F]]^d$. Então, P é um $[[\mathbb{F}_p F]]$-módulo livre. Em particular, se P é finitamente gerado, este é isomorfo a $[[\mathbb{F}_p F]]^r$ para algum $r \in \mathbb{N}$ e todo $[[\mathbb{F}_p F]]$-módulo finitamente apresentado é isomorfo a P_1/P_2 onde*

$$[[\mathbb{F}_p F]]^r \simeq P_2 \leq_c P_1 \simeq [[\mathbb{F}_p F]]^d$$

para algum par $r, d \in \mathbb{N}$. Além disso, todo $[[\mathbb{F}_p F]]$-módulo finitamente apresentado possui um $[[\mathbb{F}_p F]]$-submódulo livre de codimensão finita sobre $\mathbb{F}_p$.

Demonstração. A sequência exata curta

$$0 \to P \to [[\mathbb{F}_p F]]^d \to N \to 0$$

induz a sequência exata longa

$$\cdots \to H_2(F,N) \to H_1(F,P) \to H_1(F,[[\mathbb{F}_pF]]^d) \to \cdots$$

onde $H_2(F,N) = 0$ pois $\mathrm{cd}(F) = 1$ e $H_1(F,[[\mathbb{F}_pF]]^d) = 0$ pois $[[\mathbb{F}_pF]]^d$ é livre. Assim, $H_1(F,P) = 0$: pela Prop. 3.1 de [Bru66], temos que P é um $[[\mathbb{F}_pF]]$-módulo projetivo, e pelo Teo. 2 de [Kap58] podemos concluir que P é um $[[\mathbb{F}_pF]]$-módulo livre.

Agora, seja M um $[[\mathbb{F}_pF]]$-módulo finitamente apresentado com $P_1/P_2 \simeq M$ onde $P_2 \leq_c P_1$ são $[[\mathbb{F}_pF]]$-módulos livres finitamente gerados. Pela Proposição B.1.1, o submódulo $((IF))P_2$ é aberto em P_2, e, portanto, existe um submódulo aberto P_1' de P_1 tal que $P_1' \cap P_2$ é um submódulo de $((IF))P_2$.

Considere o submódulo $P_1'' = P_1' + P_2$. Já sabemos que P_1'' é livre, e, pela sua construção, sabemos que $((IF))P_1'' \subseteq ((IF))P_1' + ((IF))P_2$. Portanto:

$$\begin{aligned}((IF))P_1'' \cap P_2 &\subseteq [((IF))P_1' \cap P_2] + ((IF))P_2\\ &\subseteq [P_1' \cap P_2] + ((IF))P_2\\ &\subseteq ((IF))P_2\,.\end{aligned}$$

Desta forma, podemos concluir que $((IF))P_1'' \cap P_2 = ((IF))P_2$. Isto, por sua vez, nos garante que $(P_2)_F$ é um subespaço de $(P_1'')_F$. Logo, podemos completar uma base do primeiro em uma base do segundo. Pela Proposição 1.2.1, essa base se levanta a uma base livre de P_1'', isto é, P_2 é uma parcela direta de P_1''. Desta forma, P_1''/P_2 é um submódulo projetivo (e *a posteriori* livre) aberto de $P_1/P_2 \simeq M$ e, portanto, de codimensão finita sobre $\mathbb{F}_p$. $\square$

Para simplificarmos a notação, utilizaremos apenas $\mathrm{Tor}_n^G(-,-)$ para denotar o funtor $\mathrm{Tor}_n^{[[\mathbb{F}_pG]]}(-,-)$ na categoria $\mathfrak{Pmod}^{\mathrm{esq}}([[\mathbb{F}_pG]])$ dos G-módulos profinitos p-aniquilados de um grupo pro-p G.

Corolário B.1.5 ([JZ17, Cor. 3.5])**.** *Sejam F um grupo pro-p livre topologicamente finitamente gerado e M e N dois $[[\mathbb{F}_pF]]$-módulos. Se N é finitamente apresentado e M é de dimensão finita sobre $\mathbb{F}_p$ ou também finitamente apresentado, então $\mathrm{Tor}_1^F(N,M)$ é finito. Em particular, se H e K são dois subgrupos fechados e topologicamente finitamente gerados de F, então $[[\mathbb{F}_p(H\backslash F)]] \mathbin{\widehat{\otimes}}_{\mathbb{F}_p} [[\mathbb{F}_p(F/K)]]$ é finitamente relacionado sobre $[[\mathbb{F}_pF]]$.*

Demonstração. Como N é finitamente apresentado, temos uma sequência exata curta

$$0 \to [[\mathbb{F}_pF]]^r \to [[\mathbb{F}_pF]]^d \to N \to 0$$

que induz uma sequência exata longa

$$\cdots \to \mathrm{Tor}_1^F([[\mathbb{F}_pF]]^d, M) \to \mathrm{Tor}_1^F(N, M) \to M^r \to M^d \to N \,\widehat{\otimes}_{[[\mathbb{F}_pF]]}\, M \to 0\,.$$

Assim, se M possui dimensão finita sobre $\mathbb{F}_p$, temos que $\mathrm{Tor}_1^F(N, M) \leq M^r$ também é finito.

Se M é finitamente apresentado, pela Proposição B.1.4, este possui um $[[\mathbb{F}_pF]]$-submódulo livre M_0 tal que M/M_0 é finito. Assim, a sequência exata curta

$$0 \to M_0 \to M \to M/M_0 \to 0$$

induz a sequência exata longa

$$\cdots \to \mathrm{Tor}_1^F(N, M_0) \to \mathrm{Tor}_1^F(N, M) \to \mathrm{Tor}_1^F(N, M/M_0) \to \cdots$$

da qual podemos concluir que $\mathrm{Tor}_1^F(N, M) \leq \mathrm{Tor}_1^F(N, M/M_0)$ é finito pela finitude de M/M_0.

Para a parte final, note que temos uma sequência de isomorfismos:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tor}_1^F([[\mathbb{F}_p(H\backslash F)]], [[\mathbb{F}_p(F/K)]]) &\simeq \mathrm{Tor}_1^H(\mathbb{F}_p, [[\mathbb{F}_pF/K]]) \\
&\simeq \mathrm{Tor}_1^F(\mathbb{F}_p, \mathrm{Ind}_H^F[[\mathbb{F}_p(F/K)]]) \\
&\simeq H_1(F, [[\mathbb{F}_p(H\backslash F)]] \,\widehat{\otimes}_{\mathbb{F}_p}\, [[\mathbb{F}_p(F/K)]])\,.
\end{aligned}$$

□

Proposição B.1.6. *Sejam H e K subgrupos fechados de um grupo pro-p G. Então, para todo índice i, temos isomorfismos:*

$$H_i(G, [[\mathbb{F}_p(H\backslash G)]] \,\widehat{\otimes}_{\mathbb{F}_p}\, [[\mathbb{F}_p(G/K)]]) \simeq \bigsqcup_{x \in H\backslash G/K} H_i(H \cap xKx^{-1})\,.$$

Em particular, $[[\mathbb{F}_p(H\backslash G)]] \,\widehat{\otimes}_{\mathbb{F}_p}\, [[\mathbb{F}_p(G/K)]]$ é um $[[\mathbb{F}_pG]]$-módulo finitamente relacionado se, e somente se, o conjunto dos $x \in H\backslash G/K$ para os quais $H \cap xKx^{-1} \neq \{1\}$ é finito e cada tal interseção é topologicamente finitamente gerada.

Demonstração. Pela fórmula de classes duplas do Corolário 1.4.2, temos um isomorfismo de $[[\mathbb{F}_pH]]$-módulos:

$$\mathrm{Res}_H^G \mathrm{Ind}_K^G \mathbb{F}_p \simeq \bigsqcup_{x \in H\backslash G/K} \mathrm{Ind}_{H \cap xKx^{-1}}^H \mathbb{F}_p\,.$$

Assim, como a homologia comuta com somas diretas profinitas pelo Lema 1.4.1, temos:

$$\begin{aligned} H_i(G, [[\mathbb{F}_p(H\backslash G)]] \widehat{\otimes}_{\mathbb{F}_p} [[\mathbb{F}_p(G/K)]]) &\simeq H_i(G, \mathrm{Ind}_H^G [[\mathbb{F}_p(G/K)]]) \\ &\simeq H_i(H, [[\mathbb{F}_p(G/K)]])\,, \text{ por Shapiro,} \\ &\simeq H_i\left(H, \bigsqcup_{x \in H\backslash G/K} \mathrm{Ind}_{H \cap xKx^{-1}}^H \mathbb{F}_p\right) \\ &\simeq \bigsqcup_{x \in H\backslash G/K} H_i(H, \mathrm{Ind}_{H \cap xKx^{-1}}^H \mathbb{F}_p) \\ &\simeq \bigsqcup_{x \in H\backslash G/K} H_i(H \cap xKx^{-1})\,, \text{ por Shapiro.} \end{aligned}$$ □

Proposição B.1.7 ([JZS19, Cor. 2.2 e 2.3])**.** *Seja G um grupo pro-p com $cd(G) = 2$ e $\dim_{\mathbb{F}_p} H_2(G) = 1$. Então, para todo $[[\mathbb{F}_p G]]$-módulo finito L temos que*

$$\dim_{\mathbb{F}_p} H_2(G, L) \leq \dim_{\mathbb{F}_p} L\,.$$

Além disso, se N é um $[[\mathbb{F}_p G]]$-submódulo de um $[[\mathbb{F}_p G]]$-módulo M, então

$$\dim_{\mathbb{F}_p} H_2(G, N) \leq \dim_{\mathbb{F}_p} H_2(G, M)\,.$$

Demonstração. Se L é finito, então podemos encontrar um $[[\mathbb{F}_p G]]$-submódulo L_0 com codimensão 1. Assim, temos uma sequência exata longa

$$\cdots \to H_2(G, L_0) \to H_2(G, L) \to H_2(G) \to \cdots\,,$$

da qual podemos concluir por indução sobre a dimensão de L que:

$$\dim_{\mathbb{F}_p} H_2(G, L) \leq \dim_{\mathbb{F}_p} H_2(G, L_0) + \dim_{\mathbb{F}_p} H_2(G) \leq \dim_{\mathbb{F}_p} L_0 + 1 = \dim_{\mathbb{F}_p} L\,.$$

Para a segunda parte, a sequência exata curta

$$0 \to N \to M \to M/N \to 0$$

nos fornece a sequência exata longa

$$\cdots \to H_3(G, M/N) \to H_2(G, N) \to H_2(G, M) \to \cdots$$

onde $H_3(G, M/N)$ se anula, uma vez que cd$(G) = 2$. Assim, $H_2(G, N)$ é um subespaço de $H_2(G, M)$. □