CUERPOS Y ESPACIOS VECTORIALES

HENRIQUE AUGUSTO SOUZA

Cuerpos y espacios vectoriales son ejemplos de *estructuras algebraicas*, es decir, conjuntos sobre los cuales están definidas operaciones. Diferentes tipos de operaciones que cumplen diferentes axiomas definen diferentes estructuras.

¿Que es una operación? De manera general, una operación es una función. Vamos considerar apenas operaciones *binarias*, es decir, funciones que cogen un par de elementos a en un conjunto A, b en un conjunto B y nos fabrica un elemento c en el conjunto C. Normalmente denotamos nuestras operaciones binarias por un símbolo, digamos $\star$, y escribimos $a \star b = c$. Para aclarar el rol y el orden de A, B, y C, escribimos $\star\colon A \times B \to C$ para decir que $\star$ es una operación que toma el primer elemento en A, el segundo en B y nos crea un resultado en C.

Ejemplo 1.

- Sea A el conjunto de todos los estudiantes de físicas en la UAM, B el conjunto de todas las asignaturas del departamento de matemáticas y C el conjunto de las palabras "sí" y "no". Entonces la función
$$A \star X = \begin{cases} \text{sí, si el estudiante } A \text{ ha cursado la asignatura } X\,, \\ \text{no, caso contrario.} \end{cases}$$
es una operación $\star\colon A \times B \to C$.
- De naturaleza más algebraica, sea $A = B = C = \mathbb{Z}$ el conjunto de los enteros. Entonces, la función:
$$x \star y = \gcd(x, y)$$
es una operación binaria $\star\colon \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$.
- Podemos combinar operaciones que ya tenemos para crear más operaciones. Por ejemplo, combinando la suma y el producto en $\mathbb{R}$, podemos definir la operación $\circ\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $x \circ y = x + y - xy$.
- Sea A el conjunto $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ de matrices 2-por-2 reales. Definimos la operación $[\cdot,\cdot]\colon A \times A \to A$ dada por $[X, Y] = XY - YX$. Por ejemplo:
$$\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
- Para una operación entre conjuntos distintos, sea $A = \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ y $B = C = \mathbb{R}^2$. Definimos
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \curvearrowright (x, y) = (ax + by, cx + dy)\,.$$
Esto define una operación $\curvearrowright\colon\ \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

Cuando tenemos una operación del tipo $\star\colon A \times A \to A$, decimos que es una operación en A (es decir, cogemos dos elementos de A y creamos un nuevo elemento de A). Quando tenemos una operación del tipo $\star\colon A \times B \to B$, decimos que A está

Date: 24 de octubre de 2024.

operando en B (es decir, fijando un elemento a de A, para todo elemento b de B podemos transforma-lo según a utilizando la operación $a \star b$ en otro elemento de B).

Axiomas de operaciones

Hemos dicho que una estructura algebraica es un conjunto con operaciones que cumplen diferentes axiomas. A depender de la naturaleza de estas operaciones y de estos axiomas, damos diferentes nombres a estas estructuras. Además, un mismo conjunto puede tener varias estructuras distintas.

Si $\star\colon A \times A \to A$ es una operación en A, la propriedad más común que se suele pedir es la *asociatividad*: si tenemos tres elementos a, b y c de A, entonces pedimos que $a \star (b \star c) = (a \star b) \star c$, es decir, operar primero b con c y después con a es lo mismo que operar a con b y después con c.

De los ejemplos anteriores, la operación $x \star y = \gcd(x, y)$ en $\mathbb{Z}$ es asociativa ($x \star (y \star z)$ y $(x \star y) \star z$ son ambos el mayor entero que divide simultáneamente a x, y,z), bien como la operación $\circ$ en $\mathbb{R}$:

$$x \circ (y \circ z) = x \circ (y+z+yz) = x+y+z+xy+xz+yz+xyz = (x+y+xy) \circ z = (x \circ y) \circ z\,.$$

La operación $[\cdot, \cdot]$ en matrices 2-por-2 no es asociativa:

$$\left[\left[\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right], \begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right] = \left[\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

pero

$$\left[\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \left[\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right]\right] = \left[\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

Además, la noción de asociatividad sólo tiene sentido para operaciones sobre un conjunto, es decir, del tipo $\star\colon A \times A \to A$, ya que necesitamos meter el resultado de $\star$ otra vez en $\star$. Luego, no tiene sentido decir si la operación $\curvearrowright\colon \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es asociativa o no.

Otra propriedad que se suele pedir es la *conmutatividad*: para todo par de elementos a y b de A, tenemos $a \star b = b \star a$. Las operaciones $x \star y = \gcd(x, y)$ en $\mathbb{Z}$ y $x \circ y = x + y - xy$ en $\mathbb{R}$ son ejemplos de operaciones conmutativas. La operación $[\cdot, \cdot]$ en matrices 2-por-2 no es conmutativa:

$$\left[\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

pero

$$\left[\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix}0 & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\,.$$

La propriedad conmutativa solo tiene sentido para operaciones del tipo $\star A \times A \to B$, es decir, operaciones donde coges los dos valores en el mismo conjunto (pero no necesariamente te dan un resultado en A). Así, no tiene sentido decir si la operación $\curvearrowright\colon \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es conmutativa.

No los vamos a estudiar en la asignatura, pero para ejemplificar lo que decía sobre nombrar las estructuras algebraicas tenemos un *magma*: un magma es un conjunto A con una operación $\star\colon A \times A \to A$ asociativa. En este caso, decimos que el par $(A, \star)$ (el par “conjunto” y “operación”) es un magma. Para ejemplificar también que el mismo conjunto puede tener distintas estructuras, todos los pares $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{R}, \cdot)$, $(\mathbb{R}, \circ)$ son magmas. No hay que recordarse de esto, es sólo para ilustrar que significa hablar de una estructura algebraica y que un mismo conjunto puede tener varias estructuras de un mismo tipo.

Cuerpos

La estructura algebraica fundamental para la álgebra lineal es la estructura de un *cuerpo*. Recordad: una estructura es un conjunto con operaciones que cumplen ciertos axiomas. Para definir un cuerpo, vamos decir cuantas operaciones necesitamos, de que tipo son, y que tienen que cumplir.

Empecemos con un conjunto $\mathbb{K}$. Para definir una estructura de cuerpo, vamos pedir que $\mathbb{K}$ tenga dos operaciones binarias:

$$\oplus \colon \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}\,,$$
$$\otimes \colon \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}\,.$$

Llamamos la primera operación de "suma" y la segunda de "producto", pero no hace falta ni que $\mathbb{K}$ ni que las operaciones $\oplus$ y $\otimes$ tengan nada que ver con números o la suma o producto usual de estos. Por esto vamos utilizar (por hora) los símbolos $\oplus$ y $\otimes$ en lugar del usual $+$ y $\cdot$ para denotar la suma y el producto de un cuerpo genérico. Como en el caso del magma, vamos denotar esta estructura específica de $\mathbb{K}$ por el trío $(\mathbb{K}, \oplus, \otimes)$ (es decir, el trío "conjunto" y "operación suma" y "operación producto").

Un error común cuando se estudian estructuras es confundirse con el tipo de operaciones. Recordad: para una estructura de cuerpo, si piden dos operaciones donde *ambas* empiezan con un par en $\mathbb{K}$ y terminan en $\mathbb{K}$. Por ejemplo, tiene sentido preguntar si $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ o $(\mathbb{R}, +, \circ)$ es un cuerpo, mientras para $(\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R}), \curvearrowright)$ o $(\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R}), +, \curvearrowright)$ no: la primera tiene una operación a menos, y en la segunda la operación $\curvearrowright$ no tiene el tipo correcto (debería ser una operación de tipo $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \times \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$).

La lista de axiomas de un cuerpo es la siguiente:

(C1) La operación $\oplus$ es asociativa.
(C2) La operación $\otimes$ es asociativa.
(C3) La operación $\oplus$ es conmutativa.
(C4) La operación $\otimes$ es conmutativa.
(C5) Hay un elemento $0_{\mathbb{K}}$ tal que
$$0_{\mathbb{K}} \oplus x = x$$
para todo $x \in \mathbb{K}$.
(C6) Para todo $x \in \mathbb{K}$ existe un elemento $y \in \mathbb{K}$ tal que
$$x \oplus y = 0_{\mathbb{K}}\,.$$
(C7) Hay un elemento $1_{\mathbb{K}}$ tal que
$$1_{\mathbb{K}} \otimes x = x$$
para todo $x \in \mathbb{K}$.
(C8) $1_{\mathbb{K}} \neq 0_{\mathbb{K}}$.
(C9) Para todo $x \in \mathbb{K}$ distinto de $0_{\mathbb{K}}$ existe un elemento $y \in \mathbb{K}$ tal que
$$x \otimes y = 1_{\mathbb{K}}\,.$$
(C10) Para todos $x, y, z \in \mathbb{K}$ se cumple:
$$x \otimes (y \oplus z) = (x \otimes y) \oplus (x \otimes z)\,.$$

Es una lista larga de propriedades, pero es importante recordarse de ella. Así, tenemos la siguiente definición:

Definición 2. Un cuerpo es un trío $(\mathbb{K}, \oplus, \otimes)$ donde $\mathbb{K}$ es un conjunto, $\oplus$ y $\otimes$ son operaciones del tipo $\mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ que cumplen todos los axiomas (C1)-(C10). Si las operaciones $\oplus$ y $\otimes$ a que nos referimos están claras, solemos decir apenas que $\mathbb{K}$ es un cuerpo. También decimos que $\mathbb{K}$ junto con las operaciones $\oplus$ y $\otimes$ tiene una estructura de cuerpo.

Con las operaciones usuales de suma y producto de toda la vida, $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$ son ejemplos de cuerpos, mientras $\mathbb{Z}$ no es un cuerpo ($\mathbb{Z}$ no cumple (C9)). No vamos dar una demostración de que $\mathbb{Q}$ o $\mathbb{R}$ son cuerpos – es una demostración larga y depende de la construcción explícita de los números enteros, racionales, reales desde el análisis y de la teoría de conjuntos, lo que está allá del temario de la asignatura. Así, tomaremos por verdad que las operaciones de suma y producto en $\mathbb{R}$ definen una operación de cuerpo.

Asumiendo que la suma y el producto en $\mathbb{R}$ le dan una estructura de cuerpo, vamos demostrar que el conjunto $\mathbb{C}$ de los números complejos tiene una estructura de cuerpo. Así, ilustraremos como se verifica formalmente las propriedades (C1)-(C10).

Primero, tenemos que definir el conjunto $\mathbb{C}$. Vamos decir que sus elementos son las expresiones de la forma $a + bi$ donde a y b son números reales cualesquiera, y i es un símbolo que hemos inventado.

Ahora, vamos a definir las operaciones $\oplus$ y $\otimes$. Necesitan tener el tipo $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, es decir, toman dos números complejos y nos dan un número complejo. La definimos así:

$$(a + bi) \oplus (x + yi) = (a + x) + (b + y)i \,,$$

$$(a + bi) \otimes (x + yi) = (ax - by) + (ay + bx)i \,.$$

Notemos que hemos utilizado las operaciones de $\mathbb{R}$ para definir las operaciones de $\mathbb{C}$.

Proposición 3. *El trío* $(\mathbb{C}, \oplus, \otimes)$ *es un cuerpo.*

Demostración. Tiene sentido preguntar si es un cuerpo, ya que es un conjunto con el número correcto de operaciones del tipo correcto. Vamos verificar una a una los diez axiomas (C1)-(C10). Observemos que estamos utilizando en $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ cumple estos diez axiomas – esto es común, normalmente construimos otras estructuras a partir de las que ya conocemos.

(C1) Asociatividad de $\oplus$: calculamos

$$\begin{aligned}
((a + bi) \oplus (x + yi)) \oplus (w + zi) &= ((a + x) + (b + y)i) \oplus (w + zi) \\
&= ((a + x) + w) + ((b + y) + z)i \\
&= (a + (x + w)) + (b + (y + z))i \\
&= (a + bi) \oplus ((x + w) + (y + z)i) \\
&= (a + bi) \oplus ((x + yi) \oplus (w + zi)) \,.
\end{aligned}$$

(C2) Asociatividad de $\otimes$: otra vez, calculamos:

$$\begin{aligned}((a+bi)\otimes(x+yi))\otimes(w+zi) &= ((ax-by)+(ay+bx)i)\otimes(w+zi)\\ &= ((ax-by)w-(ay+bx)z)+((ax-by)z+(ay+bx)w)i\\ &= (axw-byw-ayz-bxz)+(axz-byz+ayw+bxw)i\\ &= (a(xw-yz)-b(xz+yw))+(a(xz+yw)+b(xw-yz))i\\ &= (a+bi)\otimes((xw-yz)+(xz+yw)i)\\ &= (a+bi)\otimes((x+yi)\otimes(w+zi))\,.\end{aligned}$$

(C3) Conmutatividad de $\oplus$:

$$\begin{aligned}(a+bi)\oplus(x+yi) &= (a+x)+(b+y)i\\ &= (x+a)+(y+b)i\\ &= (x+yi)\oplus(a+b)i\,.\end{aligned}$$

(C4) Conmutatividad de $\otimes$:

$$\begin{aligned}(a+bi)\otimes(x+yi) &= (ax-by)+(ay+bx)i\\ &= (xa-yb)+(ya+xb)i\\ &= (x+yi)\otimes(a+bi)\,.\end{aligned}$$

(C5) Tenemos $0_{\mathbb{C}}=0+0i$. Veamos que cumple su propriedad:

$$(0+0i)\oplus(a+bi)=(0+a)+(0+b)i=a+bi\,.$$

(C6) Dado un elemento $a+bi$ en $\mathbb{C}$, consideremos el elemento $(-a)+(-b)i$ en $\mathbb{C}$. Este elemento cumple:

$$(a+bi)\oplus((-a)+(-b)i)=(a+(-a))+(b+(-b))i=0+0i=0_{\mathbb{C}}\,.$$

(C7) Tenemos $1_{\mathbb{C}}=1+0i$. Veamos que cumple su propriedad:

$$(1+0i)\otimes(a+bi)=(1\cdot a-0\cdot b)+(1\cdot b+0\cdot a)i=a+bi\,.$$

(C8) Esta propriedad se cumple:

$$1_{\mathbb{C}}=1+0i\neq 0+0i=0_{\mathbb{C}}\,.$$

(C9) Sea $a+bi$ un elemento de $\mathbb{C}$ distinto de $0_{\mathbb{C}}=0+0i$. Por nuestra hipótesis, el número real a^2+b^2 es distinto de cero. Consideremos el elemento $\frac{a}{a^2+b^2}-\frac{b}{a^2+b^2}i$ de $\mathbb{C}$. Este elemento cumple:

$$\begin{aligned}(a+bi)\otimes\left(\frac{a}{a^2+b^2}-\frac{b}{a^2+b^2}i\right) &= \left(a\cdot\frac{a}{a^2+b^2}-b\left(\frac{-b}{a^2+b^2}\right)\right)+\left(-a\frac{b}{a^2+b^2}+b\frac{a}{a^2+b^2}\right)i\\ &= 1+0i=1_{\mathbb{C}}\,.\end{aligned}$$

(C10) Distributividad de $\otimes$ sobre $\oplus$: calculamos

$$\begin{aligned}(a+bi)\otimes((x+yi)\oplus(w+zi)) &= (a+bi)\otimes((x+w)+(y+z)i)\\ &= (a(x+w)-b(y+z))+(a(y+z)+b(x+w))i\\ &= (ax+aw-by-bz)+(ay+az+bx+bw)i\\ &= ((ax-by)+(aw-bz))+((ay+bx)+(az+bw))i\\ &= ((ax-by)+(ay+bx)i)\oplus((aw-bz)+(az+bw)i)\\ &= ((a+bi)\otimes(x+yi))\oplus((a+bi)\otimes(w+zi))\,.\end{aligned}$$ $\square$

Una vez que hemos verificado que $(\mathbb{C}, \oplus, \otimes)$ es un cuerpo, abandonamos la notación especial $\oplus$ y $\otimes$ para denotar la suma y el producto de números complejos por los símbolos $+$ y $\cdot$ de siempre. Hay ejemplos de cuerpos donde sus elementos no son números y las operaciones $\oplus$ y $\otimes$ no tienen nada que ver con la suma y el producto de siempre. Por ejemplo, existe una familia de juegos de dos jugadores llamada Nim, donde dos jugadores se alternan sacando varillas de montes de varillas con una cantidad fija. Con estos juegos se puede construir un cuerpo llamado el cuerpo de los Nimbers (o números de Grundy, buscad-lo en Google).

Casi todos los cuerpos que vamos estudiar en la asignatura son uno de los tres $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. Pero hay muchos, muchos más, que aparecen en otros contextos. Si quieres más ejemplos, puedes buscar en google por cuerpos finitos, los enteros módulo p (donde p es un número primo), cuerpos de funciones, cuerpos p-ádicos, cuerpos de números, y la lista sigue....

Espacios vectoriales

La otra estructura algebraica fundamental para la álgebra lineal es la estructura de un *espacio vectorial*. Esto no es realmente un único tipo de estructura, si no que para cada cuerpo $(\mathbb{K}, \oplus, \otimes)$ (o, más sencillamente, escribimos sólo $\mathbb{K}$), existe un tipo de estructura algebraica llamada $\mathbb{K}$-espacio vectorial (o espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$). Un mismo conjunto puede tener estructura de espacio vectorial sobre cuerpos distintos, o tener estructuras distintas de espacio vectorial sobre el mismo cuerpo. Otra vez, hay que fijar el cuerpo $\mathbb{K}$ y un par de operaciones que cumplen ciertos axiomas.

Fijamos un cuerpo $\mathbb{K}$ y empecemos con un conjunto V. Para definir una estructura de $\mathbb{K}$-espacio vectorial, vamos pedir que V tenga dos operaciones binarias:

$$\boxplus \colon V \times V \to V\,,$$
$$\boxtimes \colon \mathbb{K} \times V \to V\,.$$

Llamamos la primera operación de "suma" y la segunda de "producto por escalar", pero otra vez no hace falta que V ni que las operaciones $\boxplus$ y $\boxtimes$ no tengan nada que ver con números, sumas o productos. Por hora, vamos utilizar los símbolos $\boxplus$ y $\boxtimes$ en lugar del usual $+$ y $\cdot$ para denotar la suma y el producto por escalar de un espacio vectorial. Vamos denotar esta estructura específica de V por el trío $(V, \boxplus, \boxtimes)$.

Atención. Los tipos de operaciones que pedimos en $\mathbb{K}$-espacio vectorial y en cuerpo son distinas. Pensemos en X un conjunto cualesquiera. Para poner en X una estructura de $\mathbb{K}$-espacio o de cuerpo necesitamos dos operaciones. Ambas las operaciones $\oplus$ de suma de cuerpo y $\boxplus$ de suma de espacio vectorial tienen el mismo tipo: $X \times X \to X$. Pero las operaciones $\otimes$ de producto de cuerpo y $\boxtimes$ de producto por escalar de espacio vectorial tienen tipos distintos en general:

$$\otimes \colon X \times X \to X\,,$$
$$\boxtimes \colon \mathbb{K} \times X \to X\,.$$

Así que, salvo si $X = \mathbb{K}$, definidas operaciones $\boxplus \colon X \times X \to X$ y $\boxtimes \colon \mathbb{K} \times X \to X$ no tiene sentido preguntar si estas operaciones cumplen los axiomas de cuerpo, o si $(X, \boxplus, \boxtimes)$ es un cuerpo.

La lista de axiomas de un espacio vectorial es la siguiente:

(E1) La operación $\boxplus$ es asociativa.
(E2) La operación $\boxplus$ es conmutativa.

(E3) Hay un elemento 0_V tal que

$$0_V \boxplus v = v$$

para todo $v \in V$.

(E4) Para todo $v \in V$ hay un elemento $w \in V$ tal que

$$v \boxplus w = 0_V \,.$$

(E5) Para todo elemento $v \in V$ e todo par $x, y \in \mathbb{K}$, tenemos:

$$x \boxtimes (y \boxtimes v) = (x \otimes y) \boxtimes v \,.$$

(E6) Para todo elemento $v \in V$ e todo par $x, y \in \mathbb{K}$, tenemos:

$$(x \oplus y) \boxtimes v = (x \boxtimes v) \boxplus (y \boxtimes v) \,.$$

(E7) Tenemos $1_{\mathbb{K}} \boxtimes v = v$ para todo $v \in V$.

(E8) Para todo elemento $x \in \mathbb{K}$ e todo par $v, w \in V$ se cumple:

$$x \boxtimes (v \boxplus w) = (x \boxtimes v) \boxplus (x \boxtimes w) \,.$$

Fija-os que en los axiomas (E5) y (E6) se cambia donde se están evaluando las operaciones:

$$\underbrace{x}_{\mathbb{K}} \boxtimes \underbrace{(y \boxtimes v)}_{V} = \underbrace{(x \otimes y)}_{\mathbb{K}} \boxtimes \underbrace{v}_{V}$$

$$\underbrace{(x \oplus y)}_{\mathbb{K}} \boxtimes \underbrace{v}_{V} = \underbrace{(x \boxtimes v)}_{V} \boxplus \underbrace{(y \boxtimes v)}_{V}$$

Veamos tres ejemplos de $\mathbb{K}$-espacios vectoriales:

Proposición 4. *Para cada cuerpo $\mathbb{K}$, los tres trios abajo son ejemplos de $\mathbb{K}$-espacios vectoriales:*

- $V = \mathbb{K}$, $\boxplus = \oplus$ *y* $\boxtimes = \otimes$. *Es decir, todo cuerpo $\mathbb{K}$ tiene también la estructura de $\mathbb{K}$-espacio vectorial con las mismas operaciones del cuerpo.*
- $V = \mathbb{K}^n$, *el espacio de todas las secuencias $(x_1, \ldots, x_n)$ de n elementos en $\mathbb{K}$, con las operaciones*

$$(x_1, \ldots, x_n) \boxplus (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 \oplus y_1, \ldots, x_n \oplus y_n) \,,$$

$$\alpha \boxtimes (x_1, \ldots, x_n) = (\alpha \otimes x_1, \ldots, \alpha \otimes x_n) \,.$$

- $V = \mathrm{Mat}_{n \times m}(\mathbb{K})$, *el espacio de todas las matrices*

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

n-por-m con entradas en $\mathbb{K}$, y las operaciones

$$(a_{ij}) \boxplus (b_{ij}) = (a_{ij} \oplus b_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} \oplus b_{11} & a_{12} \oplus b_{12} & \cdots & a_{1m} \oplus b_{1m} \\ a_{21} \oplus b_{21} & a_{22} \oplus b_{22} & \cdots & a_{2m} \oplus b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} \oplus b_{n1} & a_{n2} \oplus b_{n2} & \cdots & a_{nm} \oplus b_{nm} \end{pmatrix} \,,$$

$$\alpha \boxtimes (a_{ij}) = (\alpha \otimes a_{ij}) \begin{pmatrix} \alpha \otimes a_{11} & \alpha \otimes a_{12} & \cdots & \alpha \otimes a_{1m} \\ \alpha \otimes a_{21} & \alpha \otimes a_{22} & \cdots & \alpha \otimes a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha \otimes a_{n1} & \alpha \otimes a_{n2} & \cdots & \alpha \otimes a_{nm} \end{pmatrix}$$

Demostración. Haremos la verificación apenas para el caso $V = \mathbb{K}^n$, los otros dos son casos particulares de este (podemos ver $\mathrm{Mat}_{n\times m}(\mathbb{K})$ también como $\mathbb{K}^{nm}$ si escribimos los elementos en orden y no en una tabla). Las operaciones $\boxplus$ y $\boxtimes$ tienen los tipos correctos ($V \times V \to V$ y $\mathbb{K} \times V \to V$), entonces tiene sentido proseguir.

(E1) Asociatividad de $\boxplus$:

$$\begin{aligned}(x_1, \dots, x_n) \boxplus ((y_1, \dots y_n) \boxplus (z_1, \dots z_n)) &= (x_1, \dots, x_n) \boxplus (y_1 \oplus z_1, \dots, y_n \oplus z_n) \\ &= (x_1 \oplus (y_1 \oplus z_1), \dots, x_n \oplus (y_n \oplus z_n)) \\ &= ((x_1 \oplus y_1) \oplus z_1), \dots, (x_n \oplus y_n) \oplus z_n) \\ &= (x_1 \oplus y_1, \dots, x_n \oplus y_n) \boxplus (z_1, \dots, z_n) \\ &= ((x_1, \dots, x_n) \boxplus (y_1, \dots, y_n)) \boxplus (z_1, \dots, z_n)\,.\end{aligned}$$

(E2) Conmutatividad de $\boxplus$:

$$\begin{aligned}(x_1, \dots, x_n) \boxplus (y_1, \dots, y_n) &= (x_1 \oplus y_1, \dots, x_n \oplus y_n) \\ &= (y_1 \oplus x_1, \dots, y_n \oplus x_n) \\ &= (y_1, \dots, y_n) \boxplus (x_1, \dots, x_n)\,.\end{aligned}$$

(E3) El elemento 0_V es $(0_{\mathbb{K}}, \dots, 0_{\mathbb{K}})$. De hecho, tenemos:

$$(0_{\mathbb{K}}, \dots, 0_{\mathbb{K}}) \boxplus (x_1, \dots, x_n) = (0_{\mathbb{K}} \oplus x_1, \dots, 0_{\mathbb{K}} \oplus x_n) = (x_1, \dots, x_n)\,.$$

(E4) Sea $(x_1, \dots, x_n)$ un elemento arbitrario de V. Como $\mathbb{K}$ es un cuerpo, para cada x_i existe un elemento y_i en $\mathbb{K}$ tal que $x_i \oplus y_i = 0_{\mathbb{K}}$. Así:

$$(x_1, \dots, x_n) \boxplus (y_1, \dots, y_n) = (x_1 \oplus y_1, \dots, x_n \oplus y_n) = (0_{\mathbb{K}}, \dots, 0_{\mathbb{K}}) = 0_V\,.$$

(E5) Sean α, β dos elementos de $\mathbb{K}$. Tenemos:

$$\begin{aligned}\alpha \boxtimes (\beta \boxtimes (x_1, \dots, x_n)) &= \alpha \boxtimes (\beta \otimes x_1, \dots, \beta \otimes x_n) \\ &= (\alpha \otimes (\beta \otimes x_1), \dots, \alpha \otimes (\beta \otimes x_n)) \\ &= ((\alpha \otimes \beta) \otimes x_1, \dots, (\alpha \otimes \beta) \otimes x_n) \\ &= (\alpha \otimes \beta) \boxtimes (x_1, \dots, x_n) \\ &,.\end{aligned}$$

(E6) Sean α, β dos elementos de $\mathbb{K}$. Calculamos:

$$\begin{aligned}(\alpha \oplus \beta) \boxtimes (x_1, \dots, x_n) &= ((\alpha \oplus \beta) \otimes x_1, \dots, (\alpha \oplus \beta) \otimes x_n) \\ &= ((\alpha \otimes x_1) \oplus (\beta \otimes x_1), \dots, (\alpha \otimes x_n) \oplus (\beta \otimes x_n)) \\ &= (\alpha \otimes x_1, \dots, \alpha \otimes x_n) \boxplus (\beta \otimes x_1, \dots, \beta \otimes x_n) \\ &= (\alpha \boxtimes (x_1, \dots, x_n)) \boxplus (\beta \boxtimes (x_1, \dots, x_n))\,.\end{aligned}$$

(E7) Veamos:

$$1_{\mathbb{K}} \boxtimes (x_1, \dots, x_n) = (1_{\mathbb{K}} \otimes x_1, \dots, 1_{\mathbb{K}} \otimes x_n) = (x_1, \dots, x_n)\,.$$

(E8) Calculamos:

$$
\begin{aligned}
\alpha \boxtimes ((x_1,\dots,x_n) \boxplus (y_1,\dots,y_n)) &= \alpha \boxtimes (x_1 \oplus y_1,\dots,x_n \oplus y_n) \\
&= (\alpha \otimes (x_1 \oplus y_1),\dots,\alpha \otimes (x_n \oplus y_n)) \\
&= ((\alpha \otimes x_1) \oplus (\alpha \otimes y_1),\dots,(\alpha \otimes x_n) \oplus (\alpha \otimes y_n)) \\
&= (\alpha \otimes x_1,\dots,\alpha \otimes x_n) \boxplus (\alpha \otimes y_1,\dots,\alpha \otimes y_n) \\
&= (\alpha \boxtimes (x_1,\dots,x_n)) \boxplus (\alpha \boxtimes (y_1,\dots,y_n)) . \qquad \square
\end{aligned}
$$

Recuerdo otra vez que un mismo conjunto puede tener más de una estructura de $\mathbb{K}$-espacio vectorial. Tenemos en $\mathbb{R}^2$ la estructura que definimos arriba, pero ahora os enseño como definir infinitas otras estructuras más:

Ejemplo 5. Fijemos un número real a cualesquiera. Vamos definir las siguientes operaciones $\boxplus_a\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ y $\boxtimes_a\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ por las fórmulas:

$$(x_1,x_2) \boxplus_a (y_1,y_2) = (x_1+y_1+a, x_2+y_2)\,,$$

$$\alpha \boxtimes_a (x_1,x_2) = (\alpha x_1 + (\alpha-1)a, \alpha x_2)\,.$$

Afirmo que el trío $(\mathbb{R}^2, \boxplus_a, \boxtimes_a)$ es otra estructura de $\mathbb{R}$-espacio vectorial que se puede poner en $\mathbb{R}^2$. Verificamos los axiomas:

(E1) Asociatividad de $\boxplus_a$:

$$
\begin{aligned}
(x_1,x_2) \boxplus_a ((y_1,y_2) \boxplus_a (z_1,z_2)) &= (x_1,x_2) \boxplus_a (y_1+z_1+a, y_2+z_2) \\
&= (x_1+y_1+z_1+2a, x_2+y_2+z_2) \\
&= (x_1+y_1+a, x_2+y_2) \boxplus_a (z_1,z_2) \\
&= ((x_1,x_2) \boxplus_a (y_1,y_2)) \boxplus_a (z_1,z_2)\,.
\end{aligned}
$$

(E2) Conmutatividad de $\boxplus_a$:

$$(x_1,x_2) \boxplus_a (y_1,y_2) = (x_1+y_1+a, x_2+y_2) = (y_1,y_2) \boxplus_a (x_1,x_2)\,.$$

(E3) Consideremos el elemento $0_a = (-a,0)$. Afirmamos que 0_a cumple el papel de elemento neutro para la suma. Calculamos:

$$(-a,0) \boxplus_a (x_1,x_2) = (x_1-a+a, x_2) = (x_1,x_2)\,.$$

(E4) El inverso aditivo de (x_1,x_2) es el elemento $(-2a-x_1,-x_2)$. De hecho:

$$(x_1,x_2) \boxplus_a (-2a-x_1,-x_2) = (x_1-2a-x_1+a, x_2-x_2) = (-a,0) = 0_a\,.$$

(E5) Tenemos:

$$
\begin{aligned}
\alpha \boxtimes_a (\beta \boxtimes_a (x_1,x_2)) &= \alpha \boxtimes_a (\beta x_1 + (\beta-1)a, \beta x_2) \\
&= (\alpha\beta x_1 + \alpha(\beta-1)a + (\alpha-1)a, \alpha\beta x_2) \\
&= (\alpha\beta x_1 + \alpha\beta a - \alpha a + \alpha a - a, \alpha\beta x_2) \\
&= (\alpha\beta x_1 + \alpha\beta a - a, \alpha\beta x_2) \\
&= (\alpha\beta x_1 + (\alpha\beta-1)a, \alpha\beta x_2) \\
&= (\alpha\beta) \boxtimes_a (x_1,x_2)\,.
\end{aligned}
$$

(E6) Calculamos:

$$\begin{aligned}(\alpha+\beta)\boxtimes_a(x_1,x_2) &= ((\alpha+\beta)x_1+(\alpha+\beta-1)a,(\alpha+\beta)x_2)\\ &= (\alpha x_1+\beta x_1+\alpha a+\beta a-a,\alpha x_2+\beta x_2)\\ &= (\alpha x_1+\beta x_1+(\alpha-1)a+(\beta-1)a+a,\alpha x_1+\beta x_2)\\ &= (\alpha x_1+(\alpha-1)a,\alpha x_2)\boxplus_a(\beta x_1+(\beta-1)a,\beta x_2)\\ &= (\alpha\boxtimes_a(x_1,x_2))\boxplus_a(\beta\boxtimes_a(x_1,x_2)).\end{aligned}$$

(E7) Tenemos:

$$1\boxtimes_a(x_1,x_2)=(1\cdot x_1+(1-1)a,1\cdot x_2)=(x_1,x_2).$$

(E8) Por fin:

$$\begin{aligned}\alpha\boxtimes_a((x_1,x_2)\boxplus_a(y_1,y_2)) &= \alpha\boxtimes_a(x_1+y_1+a,x_2+y_2)\\ &= (\alpha(x_1+y_1+a)+(\alpha-1)a,\alpha(x_2+y_2))\\ &= (\alpha x_1+\alpha a+\alpha y_1+\alpha a-a,\alpha x_2+\alpha y_2)\\ &= (\alpha x_1+(\alpha-1)a+\alpha y_1+(\alpha-1)a+a,\alpha x_2+\alpha y_2)\\ &= (\alpha x_1+(\alpha-1)a,\alpha x_2)\boxplus_a(\alpha y_1+(\alpha-1)a,\alpha y_2)\\ &= (\alpha\boxtimes_a(x_1,x_2))\boxplus_a(\alpha\boxtimes_a(y_1,y_2)).\end{aligned}$$

Así, los ocho axiomas se cumplen, y vemos que $(\mathbb{R}^2,\boxplus_a,\boxtimes_a)$ es una estructura de $\mathbb{R}$-espacio vectorial en $\mathbb{R}^2$ para cada número real que elegimos. Todas estas estructuras son distintas, por ejemplo, tienen vectores nulos distintos.

Para aún otra estructura de $\mathbb{R}$-espacio vectorial en $\mathbb{R}^2$ donde $(0,0)$ es el vector nulo y la inversa aditiva de (x_1,x_2) es $(-x_1,-x_2)$, considere las siguientes operaciones:

$$(x_1,x_2)\boxplus(y_1,y_2)=(\sqrt[3]{x_1^3+y_1^3},\sqrt[3]{x_2^3+y_2^3})$$
$$\alpha\boxtimes(x_1,x_2)=(\sqrt[3]{\alpha}\cdot x_1,\sqrt[3]{\alpha}\cdot x_2).$$

Os dejo de ejercício verificar que con estas operaciones se cumple las propriedades (E1)-(E8).

Ejemplo 6. Por fin, vamos hacer el ejercicio 1 de la hoja 4, verificar que el espacio $\mathcal{P}_n(\mathbb{K})$ de polinomios de grado como máximo n sobre un cuerpo $(\mathbb{K},\oplus,\otimes)$ tiene una estructura de $\mathbb{K}$-espacio vectorial. Un polinomio de grado como máximo n es una expresión de la forma

$$a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$$

donde cada elemento a_i está en $\mathbb{K}$. Definimos suma y producto por escalar de la siguiente forma:

$$(a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n)\boxplus(b_0+b_1x+\cdots+b_nx^n)=(a_0\oplus b_0)+(a_1\oplus b_1)x+\cdots+(a_n\oplus b_n)x^n,$$

$$\alpha\boxtimes(a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n)=(\alpha\otimes a_0)+(\alpha\otimes a_1)x+\cdots+(\alpha\otimes a_n)x^n.$$

La suma y el producto tienen el tipo correcto, es decir:

$$\boxplus\colon\mathcal{P}_n(\mathbb{K})\times\mathcal{P}_n(\mathbb{K})\to\mathcal{P}_n(\mathbb{K}),$$

$$\boxtimes\colon\mathbb{K}\times\mathcal{P}_n(\mathbb{K})\to\mathcal{P}_n(\mathbb{K}),$$

así que tiene sentido continuar.

(E1) Asociatividad de $\boxplus$:

$$\begin{aligned}&(a_0+\cdots+a_nx^n)\boxplus((b_0+\cdots+b_nx^n)\boxplus(c_0+\cdots c_nx^n))\\&=(a_0+\cdots+a_nx^n)\boxplus((b_0\oplus c_0)+\cdots+(b_n\oplus c_n)x^n)\\&=(a_0\oplus(b_0\oplus c_0))+\cdots+(a_n\oplus(b_n\oplus c_n))x^n\\&=((a_0\oplus b_0)\oplus c_0)+\cdots+((a_n\oplus b_n)\oplus c_n)x^n\\&=((a_0\oplus b_0)+\cdots+(a_n\oplus b_n)x^n)\boxplus(c_0+\cdots+c_nx^n)\\&=((a_0+\cdots+a_nx^n)\boxplus(b_0+\cdots+b_nx^n))\boxplus(c_0+\cdots+c_nx^n)\,.\end{aligned}$$

(E2) Conmutatividad de $\boxplus$:

$$\begin{aligned}(a_0+\cdots+a_nx^n)\boxplus(b_0+\cdots+b_nx^n)&=(a_0\oplus b_0)+\cdots+(a_n\oplus b_n)x^n\\&=(b_0\oplus a_0)+\cdots+(b_n\oplus a_n)x^n\\&=(b_0+\cdots+b_nx^n)\boxplus(a_0+\cdots+a_nx^n)\,.\end{aligned}$$

(E3) Tenemos $0_V=0_{\mathbb{K}}+0_{\mathbb{K}}x+\cdots+0_{\mathbb{K}}x^n$. De hecho:

$$\begin{aligned}(0_{\mathbb{K}}+0_{\mathbb{K}}x+\cdots+0_{\mathbb{K}}x^n)\boxplus(a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n)&=(0_{\mathbb{K}}\oplus a_0)+(0_{\mathbb{K}}\oplus a_1)x+\cdots+(0_{\mathbb{K}}\oplus a_n)x^n\\&=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n\,.\end{aligned}$$

(E4) Sea $a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$ un polinomio sobre $\mathbb{K}$. Cada a_i tiene un inverso aditivo b_i en $\mathbb{K}$, es decir, un elemento tal que $a_i\oplus b_i=0_{\mathbb{K}}$. Así:

$$\begin{aligned}(a_0+\cdots+a_nx^n)\boxplus(b_0+\cdots+b_nx^n)&=(a_0\oplus b_0)+\cdots+(a_n\oplus b_n)x^n\\&=0_{\mathbb{K}}+\cdots+0_{\mathbb{K}}x^n=0_V\,.\end{aligned}$$

(E5) Tenemos:

$$\begin{aligned}\alpha\boxtimes(\beta\boxtimes(a_0+\cdots+a_nx^n))&=\alpha\boxtimes((\beta\otimes a_0)+\cdots+(\beta\otimes a_n)x^n)\\&=(\alpha\otimes(\beta\otimes a_0))+\cdots+(\alpha\otimes(\beta\otimes a_n))x^n\\&=((\alpha\otimes\beta)\otimes a_0)+\cdots+((\alpha\otimes\beta)\otimes a_n)x^n\\&=(\alpha\otimes\beta)\boxtimes(a_0+\cdots+a_nx^n)\,.\end{aligned}$$

(E6) Calculamos:

$$\begin{aligned}(\alpha\oplus\beta)\boxtimes(a_0+\cdots+a_nx^n)&=((\alpha\oplus\beta)a_0)+\cdots+(\alpha\oplus\beta)a_n)x^n\\&=((\alpha\otimes a_0)\oplus(\beta\otimes a_0))+\cdots+((\alpha\otimes a_n)\oplus(\beta\otimes a_n))x^n\\&=((\alpha\otimes a_0)+\cdots+(\alpha\otimes a_n)x^n)\boxplus((\beta\otimes a_0)+\cdots+(\beta\otimes a_n)x^n)\\&=(\alpha\boxtimes(a_0+\cdots+a_nx^n))\boxplus(\beta\boxtimes(a_0+\cdots+a_nx^n))\,.\end{aligned}$$

(E7) Tenemos que:

$$1_{\mathbb{K}}\boxtimes(a_0+\cdots+a_nx^n)=(1_{\mathbb{K}}\otimes a_0)+\cdots+(1_{\mathbb{K}}\otimes a_n)x^n=a_0+\cdots+a_nx^n\,.$$

(E8) Distributividad:

$$\begin{aligned}&\alpha\boxtimes((a_0+\cdots+a_nx^n)\boxplus(b_0+\cdots+b_nx^n))\\&=\alpha\boxtimes((a_0\oplus b_0)+\cdots+(a_n\oplus b_n)x^n)\\&=(\alpha\otimes(a_0\oplus b_0))+\cdots+(\alpha\otimes(a_n\oplus b_n))x^n\\&=((\alpha\otimes a_0)\oplus(\alpha\otimes b_0))+\cdots+((\alpha\otimes a_n)\oplus(\alpha\otimes b_n))x^n\\&=((\alpha\otimes a_0)+\cdots+(\alpha\otimes a_n)x^n)\boxplus((\alpha\otimes b_0)+\cdots+(\alpha\otimes b_n)x^n)\\&=(\alpha\boxtimes(a_0+\cdots+a_nx^n))\boxplus(\alpha\boxtimes(b_0+\cdots+b_nx^n))\,.\end{aligned}$$