Soluciones generales de recurrencias

Henrique Souza

24 de octubre de 2025

Consideremos el espacio vectorial complejo V formado por todas las sucesiones de números complejos $a = (a_n)_{n\geq 0}$. Una relación de recurrencia lineal en a de orden k es una igualdad de la forma

$$a_n = \beta_1 a_{n-1} + \beta_2 a_{n-2} + \cdots + \beta_k a_{n-k} + f(n) \tag{1}$$

que se cumpla para todo $n \geq k$, donde $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ es alguna función compleja de n. Decimos que la recurrencia es homogénea si $f(n) = 0$ para todo $n \geq k$.

Las soluciones del caso homogéneo

Cuando la eq. (1) es homogénea, el conjunto de sucesiones que la cumplen es un subespacio vectorial de V. Hemos visto en clase como describir dicho subespacio: consideramos el polinomio característico

$$P(x) = x^k - \beta_1 x^{k-1} - \beta_2 x^{k-2} - \cdots - \beta_k = 0$$

y si r es una raíz de $P(x)$ con multiplicidad algebraica m, entonces las sucesiones $r^n\,, nr^n\,, n^2r^n\,, \ldots\,, n^{m-1}r^n$ son elementos linealmente independientes de V, y V está generado por esta familia de todos tales elementos para cada raíz compleja de $P(x)$.

Por que esto pasa? Consideremos la siguiente aplicación lineal $S\colon V \to V$ definida por $S(a) = (b_n)_{n\geq 0}$ donde $b_n = a_{n+1}$. En términos de sucesiones, lo que la aplicación S hace es simplemente desplazar todos los términos de la sucesión $\{a_n\}$ por un índice a menos. Utilizando esta notación, la parte homogénea de la recurrencia de la eq. (1) se puede escribir como:

$$\begin{aligned} S^k(a) - \beta_1 S^{k-1}(a) - \beta_2 S^{k-2}(a) - \cdots \beta_k a &= (S^k - \beta_1 S^{k-1} - \cdots - \beta_k)(a) \\ &= 0`,. \end{aligned}$$

Si considerarnos el polinomio complejo

$$Q(x) = x^k - \beta_1 x^{k-1} - \cdots - \beta_k\,,$$

esta recurrencia se puede escribir sencillamente como

$$Q(S)(a) = 0\,.$$

El teorema fundamental del álgebra nos dice que $Q(x)$, como polinomio complejo, se puede factorizar completamente como producto de polinomios lineales:

$$Q(x) = (x-\lambda_1)^{m_1}(x-\lambda_2)^{m_2}\cdots(x-\lambda_s)^{m_s}\,,$$

donde los $\lambda_1\,,\ldots\,,\lambda_s$ son las raíces complejas distintas de $Q(x)$ y $m_1\,,\ldots\,,m_s \geq 1$ son sus multiplicidades algebraicas.

Ejercicio Si un polinomio complejo $Q(x)$ se factoriza como

$$Q(x) = (x-\lambda_1)^{m_1}\cdots(x-\lambda_s)^{m_s}\,,$$

entonces tenemos la igualdad

$$Q(S) = (S-\lambda_1\,\mathrm{Id})^{m_1}\circ\cdots\circ(S-\lambda_s\,\mathrm{Id})^{m_s}$$

como aplicaciones lineales $Q(S)\colon V\to V$, donde $\circ$ denota la composición de aplicaciones lineales.

Recordemos que, por definición, una sucesión $a\in V$ que cumple $(S-\lambda_i)^m(a)=0$ para algún $m>0$ es llamada un *vector propio generalizado* para S con *valor propio* λ_i. Definimos el m-esimo *subespacio proprio generalizado* con valor proprio λ_i de S en V como

$$E^m_{\lambda_i}(S) = \{a\in V\colon (S-\lambda_i)^m a = 0\}\ .$$

Utilizaremos ahora los dos siguientes lemas de álgebra lineal:

Lema 1. *Sea V un espacio vectorial complejo y $T\colon V\to V$ una aplicación lineal. Si*

$$Q(x) = (x-\lambda_1)^{m_1}\cdots(x-\lambda_s)^{m_s}\,,$$

es la descomposición de Q en factores lineales con raíces distintas $\lambda_1\,,\ldots\,,\lambda_s$, entonces

$$\ker(Q(T)) = E^{m_1}_{\lambda_1}(T)\oplus\cdots\oplus E^{m_s}_{\lambda_s}(T)\,.$$

Demostración. Como los polinomios

$$(x-\lambda_1)^{m_1}\,,\ldots\,,(x-\lambda_s)^{m_s}$$

son coprimos, si definimos

$$E_i(x) = \prod_{j\neq i}(x-\lambda_j)^{m_j}$$

entonces $\gcd(E_1(x)\,,\ldots\,,E_s(x)) = 1$ y luego por la identidad de Bezóut para polinomios hay polinomios complejos $p_1(x)\,,\ldots\,,p_s(x)$ tales que

$$p_1(x)E_1(x)+\cdots+p_s(x)E_s(x) = 1\,.$$

Así:

$$p_1(T)E_1(T)+\cdots p_s(T)E_s(T) = \mathrm{Id}$$

como funciones lineales en V. Para cada $1 \leq i \leq s$ y $a \in \ker(Q(T))$ definimos:

$$a_i = p_i(T)E_i(T)a\,.$$

Tenemos entonces

$$\begin{aligned} a_1 + \cdots + a_s &= (p_1(T)E_1(T) + \cdots + p_s(T)E_s(T))a \\ &= \mathrm{Id}(a) = a\,. \end{aligned}$$

Además, para cada i tenemos

$$(T-\lambda_i)^{m_i} a_i = p_i(T)(T-\lambda_i)^{m_1} E_i(T)a = p_i(T)Q(T)a = 0\,,$$

es decir, $a_i \in E_{\lambda_i}^{m_i}(T)$. Esto demuestra que $\ker(Q(T)) = E_{\lambda_1}^{m_1}(T) + \cdots + E_{\lambda_s}^{m_s}(T)$.

Para comprobar que la suma es directa, tenemos que verificar que $E_{\lambda_i}^{m_i}(T) \cap E_{\lambda_j}^{m_j}(T) = \{0\}$ siempre que $\lambda_i \neq \lambda_j$. Esto sigue por inducción, observando que

$$a \in E_{\lambda_i}^{m_i}(T) \iff (T - \lambda_i \,\mathrm{Id})^{m_i - 1} a \in E_{\lambda_i}^{1}(T)$$

y además

$$E_{\lambda_i}^{1}(T) \cap E_{\lambda_j}^{1}(T) = \{0\}$$

para $\lambda_i \neq \lambda_j$. □

Lema 2. *Para V y S como arriba, tenemos*

$$\ker(S - \lambda\,\mathrm{Id})^k = \langle (\lambda^n)\,, (n\lambda^n)\,, \ldots\,, (n^{k-1}\lambda^n)\rangle$$

para todo $\lambda \neq 0$.

Demostración. Calculamos primero $\ker(S - \lambda\,\mathrm{Id})$. Una sucesión $a = (a_n) \in V$ está en $\ker(S - \lambda\,\mathrm{Id})$ si y sólo si cumple

$$a_{n+1} - \lambda a_n = 0 \iff a_{n+1} = \lambda a_n\,.$$

Así, se verifica que a tiene que ser una progresión geométrica de razón λ, es decir, $a_n = C\lambda^n$ para alguna constante $C \in \mathbb{C}$. Esto demuestra el lema para $k = 1$.

Proseguimos ahora por inducción en k. Como

$$a \in \ker(S - \lambda\,\mathrm{Id})^k \iff (S - \lambda\,\mathrm{Id})a \in \ker(S - \lambda\,\mathrm{Id})^{k-1}\,,$$

sabemos que existen constantes complejas $C_0\,, \ldots\,, C_{k-2}$ tales que

$$(S - \lambda\,\mathrm{Id})a = C_0(\lambda^n) + C_1(n\lambda^n) + \cdots + C_{k-2}(n^{k-2}\lambda^n)\,.$$

Aplicando la definición de $S - \lambda\,\mathrm{Id}$, tenemos

$$a_{n+1} - \lambda a_n = C_0\lambda^n + C_1 n\lambda^n + \cdots + C_{k-2} n^{k-2}\lambda^{k-2}$$

Si definimos $b_n = \frac{a_n}{\lambda^n}$, tenemos:

$$\lambda^{n+1} b_{n+1} - \lambda^{n+1} b_n = C_0 \lambda^n + \cdots + C_{k-2} n^{k-2} \lambda^n$$

$$\iff b_{n+1} - b_n = \frac{1}{\lambda} \left(C_0 + C_1 n + \cdots + C_{k-2} n^{k-2} \right) .$$

La fórmula de Faulhaber ahora nos dice que el sumatorio

$$\sum_{m=0}^{n-1} C_0 + C_1 m + \cdots + C_{k-2} m^{k-2} = D_0 + D_1 n + \cdots + D_{k-1} n^{k-1}$$

se puede expresar como un polinomio en n de grado $k-1$ (buscad-lo en Google!) Así:

$$\begin{aligned} a_n &= \lambda^n b_n \\ &= \lambda^n \left(b_0 + \frac{1}{\lambda} \sum_{m=0}^{n-1} \left(C_0 + C_1 m + \cdots + C_{k-2} m^{k-2} \right) \right) \\ &= \lambda^n \left(b_0 + \lambda^{-1} D_0 + \lambda^{-1} D_1 n + \cdots + \lambda^{-1} D_{k-1} n^{k-1} \right) , \end{aligned}$$

es decir, $(a_n) \in \langle (\lambda^n), \ldots, (n^{k-1} \lambda^n) \rangle$. □

Los dos lemas juntos nos describen completamente el espacio de soluciones de la versión homogénea de la eq. (1): son combinaciones lineales complejas de funciones de la forma $n^k \lambda^n$ donde λ es una raíz de $Q(x)$ con multiplicidad algebraica mayor que k.

Soluciones generales

Ahora estudiaremos las soluciones del caso no homogéneo de la eq. (1), es decir, cuando $f(n)$ no es necesariamente la función nula. Observemos que podemos pensar en $f(n)$ como un elemento de V si definimos la sucesión $b = (b_n)$ con $b_n = f(n)$. Así, la eq. (1) tiene la forma:

$$Q(S) a = b \,.$$

Como $Q(S) \colon V \to V$ es lineal, sabemos que todas las soluciones de eq. (1) son de la forma $a = a^{(h)} + a^{(p)}$, donde

$$Q(S) a^{(h)} = 0 \quad \text{y} \quad Q(S) a^{(p)} = b$$

es una solución particular cualesquiera. Como ya conocimos todas las posibilidades para $a^{(h)}$, nos sirve con encontrar una única solución para $a^{(p)}$ y así obtenemos todas las soluciones para la eq. (1).

No hay método en general que funcione un 100 per 100 de las veces, pelo el método más común es la 'adivinación': buscamos una solución $a^{(p)}$ que se parezca con b, algo como $a^{(p)} = Cb$ para alguna constante $C \in \mathbb{C}$ es algo razonable para intentar primero. Nos quedaríamos con una ecuación

$$Q(S)(Cb) = C \cdot Q(S)b = b$$

que debe cumplirse para todo $n \geq 0$, y ojalá esto nos permite determinar una C que lo logre.

Esto no es una regla arbitraria. Buscar una solución $a^{(p)} = Cb$ es lo mismo que testar si b es un vector propio para el operador lineal $Q(S)$. Si hay C que cumple

$$Q(S)(Cb) = b\,,$$

entonces

$$Q(S)(b) = \frac{1}{C}b\,,$$

es decir, tal método funciona sí y sólo si b es un vector propio de $Q(S)$ con valor propio $\frac{1}{C}$. Esto suele funcionar en muchos casos por $Q(S)$ tener, *en general*, muchísimos valores y vectores propios en V.

Pero que pasa si b es un vector propio de $Q(S)$ con valor propio 0, es decir, $Q(S)b = 0$? No podemos encontrar entonces una constante C que cumpla $\frac{1}{C} = 0$, el método falla.

Si esto pasa, entonces por definición b una solución del sistema homogéneo $Q(S)b = 0$ y luego tiene la forma $b = (b_n)$ donde

$$b_n = \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=0}^{m_s - 1} C_{ij} n^j \lambda_i^n\,,$$

donde las C_{ij} son constantes complejas y

$$Q(x) = (x - \lambda_1)^{m_1} \cdots (x - \lambda_s)^{m_s}$$

es la descomposición de $Q(x)$ en factores lineales.

Aquí es donde podemos utilizar el truco de multiplicar por una potencia n. El punto clave es el siguiente lema:

Lema 3. *Si $a = (n^j \lambda^n)$, entonces*

$$(S - \lambda)a = \left(\lambda^n \left(\sum_{i=1}^{j-1} \lambda \binom{j}{i} n^i \right) \right)\,.$$

En particular, $(S - \lambda)^l a$ es una combinación lineal de $n^i \lambda^n$ para $0 \leq i \leq j - l$. Si $\mu \neq \lambda$, entonces $(S - \mu)^l a$ es una combinación lineal de $n^i \lambda^n$ para $0 \leq i \leq j$, y el coeficiente de $n^j \lambda^n$ es no nulo.

Demostración. Ponemos $(S-\lambda)a = (a'_n)$. Entonces:

$$\begin{aligned} a'_n &= a_{n+1} - \lambda a_n \\ &= (n+1)^j \lambda^{n+1} - n^j \lambda^{n+1} \\ &= \lambda^{n+1}((n+1)^j - n^j) \\ &= \lambda^n \left(\sum_{i=0}^{j-1} \lambda \binom{j}{i} n^i \right) \end{aligned}$$

Para $\mu \neq \lambda$, tenemos

$$(S-\mu)(n^j\lambda^n) = ((n+1)^j\lambda^{n+1} - n^j\lambda^n\mu) = (\lambda-\mu)n^j\lambda^n + \sum_{i=0}^{j-1} \lambda \binom{j}{i} n^i \lambda^n \,.$$

Por inducción, sigue que el coeficiente de $n^j\lambda^n$ en $(S-\mu)^l(n^j\lambda^n)$ es $(\lambda-\mu)^l \neq 0$. $\square$

Escribimos $b = b^{(1)} + \cdots + b^{(s)}$ donde cada $b^{(i)}$ es la parte de b que corresponde al valor propio i:

$$b^{(i)} = \sum_{j=0}^{m_s-1} C_{ij} n^j \lambda_i^n \,.$$

Si tomamos

$$a_n^{(i,p)} = \sum_{j=m_s}^{2m_s-1} D_{ij} n^j \lambda_i^n \,,$$

entonces por el lema 3 tenemos que $Q(S)a^{(i,p)}$ es una combinación lineal compleja de $\lambda_i^n, \ldots, n^{m_s-1}\lambda_i^n$, así que tenemos chance de encontrar constantes D_{ij} que cumplan

$$Q(S)a^{(i,p)} = b^{(i)} \,.$$

Si lo encontramos, entonces $a^{(p)} = a^{(1,p)} + \cdots + a^{(s,p)}$ es la solución particular que buscábamos:

$$Q(S)a^{(p)} = Q(S)a^{(1,p)} + \cdots + Q(S)a^{(s,p)} = b^{(1)} + \cdots + b^{(s)} = b \,.$$

Un ejemplo resuelto

Consideremos la recurrencia

$$a_{n+3} = 5a_{n+2} - 8a_{n+1} + 4a_n + 3^n - n2^n + 8n \,.$$

La podemos escribir como

$$Q(S)a = f(n)$$

donde

$$Q(x) = x^3 - 5x^2 + 8x - 4$$

y $f(n) = 3^n - n2^n + 8n$. Tenemos la factorización

$$Q(x) = (x-1)(x-2)^2\,,$$

donde ya sabemos que las soluciones del caso homogéneo $Q(S)a^{(h)} = 0$ son de la forma

$$a_n^{(h)} = A \cdot 1^n + B \cdot 2^n + C \cdot n \cdot 2^n = A + 2^n B + n2^n C$$

para algunas constantes A, B y C.

Vamos separar $f(n)$ como sus tres partes $f(n)^{(1)}$, $f(n)^{(2)}$ y $f(n)^{(3)}$ donde

$$f(n)^{(1)} = 3^n\,, \quad f(n)^{(2)} = -n2^n \quad \text{y} \quad f(n)^{(3)} = 8n\,.$$

Vamos también descomponer nuestra solución particular en $a^{(p)} = a^{(1,p)} + a^{(2,p)} + a^{(3,p)}$ y intentar encontrar $a^{(i,p)}$ que cumpla

$$Q(s)a^{(i,p)} = f(n)^{(i)}\,.$$

Como describimos en la sección anterior, intentaremos primero ver si los $f(n)^{(i)}$ son vectores propios de $Q(S)$. Para $f(n)^{(1)} = 3n$, tenemos:

$$\begin{aligned} Q(S)f(n)^{(1)} &= 3^{n+3} - 5 \cdot 3^{n+2} + 8 \cdot 3^{n+1} - 4 \cdot 3^n \\ &= (27 - 45 + 24 - 4) \cdot 3^n = 2 \cdot 3^n = 2f(n)^{(1)}\,. \end{aligned}$$

Así, $f(n)^{(1)}$ es vector propio de $Q(S)$ con valor propio 2. Luego, nos sirve con tomar $a^{(1,p)} = \frac{1}{2}f(n)^{(1)} = \frac{3^n}{2}$:

$$Q(S)a^{(1,p)} = \frac{1}{2}Q(S)f(n)^{(1)} = f(n)^{(1)}\,.$$

Pasemos ahora al siguiente: $f(n)^{(2)} = -n2^n$. Tenemos:

$$\begin{aligned} Q(S)f(n)^{(2)} &= -(n+3)2^{n+3} + 5(n+2)2^{n+2} - 8(n+1)2^{n+1} + 4n2^n \\ &= (-8 + 20 - 16 + 4)n2^n + (-24 + 40 - 16)2^n \\ &= 0\,. \end{aligned}$$

Así, $f(n)^{(2)}$ es vector propio con valor propio 0, como ya esperábamos por la forma de las soluciones homogéneas! Por la descripción de la sección anterior (específicamente, el lema 3), sabemos que debemos buscar un $a^{(2,p)}$ de la forma $Dn^2 2^n + En^3 2^n$ para algún par de constantes D y E. Calculamos:

$$\begin{aligned} -n2^n &= Q(S)a^{(2,p)} \\ &= -D(n+3)^2 2^{n+3} + 5D(n+2)^2 2^{n+2} - 8D(n+1)^2 2^{n+1} + 4Dn^2 2^n \\ &\quad - E(n+3)^3 2^{n+3} + 5E(n+2)^3 2^{n+2} - 8E(n+1)^3 2^{n+1} + 4En^3 2^n \\ &= (-8E + 20E - 16E + 4E)n^3 2^n \\ &\quad + (-8D + 20D - 16D + 4D - 72E + 120E - 48E)n^2 2^n \\ &\quad + (-48D + 80D - 32D - 216E + 240E - 48E)n2^n \\ &\quad + (-72D + 80D - 16D - 216E + 160E - 16E)2^n \\ &= -24En2^n + (-8D - 72E)2^n\,. \end{aligned}$$

Así, obtenemos el sistema:

$$\begin{cases} -24E & = -1\,, \\ -8D - 72E & = 0\,. \end{cases}$$

cuya solución es $E = \frac{1}{24}$ y $D = -9$. Por lo tanto, tenemos

$$a^{(2,p)} = -9n^2 2^n + \frac{1}{24} n^3 2^n\,.$$

Por fin, vamos a testar si $f(n)^{(3)} = 8n$ es valor propio de $Q(S)$. Calculamos:

$$\begin{aligned} Q(S)f(n)^{(3)} &= 8(n+3) - 5 \cdot 8(n+2) + 8 \cdot 8(n+1) - 4 \cdot 8n \\ &= (8 - 40 + 64 - 32)n + (24 - 80 + 64) \\ &= 8\,. \end{aligned}$$

¡Muy mal! $f(n)^{(3)}$ no es vector propio de $Q(S)$. Y ahora, ¿qué se hace?

En general, no hay mucho que hacer en este caso. Pero como $f(n)^{(3)}$ es un producto de un polinomio ($8n$) con una exponencial de una raíz del polinomio característico (1^n), el lema 3 nos da una pista de como proceder: deberíamos buscar una función $a^{(3,p)}$ de la forma $Gn + Hn^2$ para algún par de constantes G y H.

Tenemos:

$$\begin{aligned} 8n &= Q(S)a^{(3,p)} \\ &= G(n+3) - 5G(n+2) + 8G(n+1) - 4Gn \\ &\quad H(n+3)^2 - 5H(n+2)^2 + 8H(n+1)^2 - 4Hn^2 \\ &= (H - 5H + 8H - 4H)n^2 \\ &\quad + (G - 5G + 8G - 4G + 6H - 20H + 16H)n \\ &\quad + (3G - 10G + 8G + 9H - 20H + 8H) \\ &= 2Hn + (G - 3H)\,. \end{aligned}$$

Obtenemos así el sistema

$$\begin{cases} 2H = 8 \\ G - 3H = 0 \end{cases}$$

cuya solución es $H = 4$ y $G = 12$. Luego:

$$a^{(3,p)} = 12n + 4n^2\,.$$

Obtenemos así que la solución general de la recurrencia

$$a_{n+3} = 5a_{n+2} - 8a_{n+1} + 4a_n + 3^n - n2^n + 8n$$

son las sucesiones de la forma

$$a_n = A + 2^n B + n2^n C + \frac{3^n}{2} - 9n^2 2^n + \frac{n^3 2^n}{24} + 12n + 4n^2$$

para algún trío de constantes A, B y C.